

Speciální teorie relativity

ZS 2003 / 2004

sepsala Jaroslava Schovancová, upravili Vojtěch Vyklický a Vít Kučera

`jarka@schovan.net`

Verze 2.06

4. října 2009

Obsah

1 Úvod, výchozí principy	4
1.1 Galileova transformace	4
1.2 Základní experimenty	4
1.2.1 Michelsonův-Morleyův pokus, Kennedyův-Thorndikeův pokus	4
1.2.2 Lorentzova kontrakční hypotéza	6
1.2.3 Dilatační hypotéza	6
1.2.4 Hoekův pokus	6
1.3 Výchozí principy STR	7
1.3.1 První Newtonův zákon	8
1.3.2 Princip speciální relativity	8
1.3.3 Princip konstantní rychlosti světla	8
2 Lorentzova transformace a její bezprostřední důsledky	9
2.1 Speciální Lorentzova transformace	9
2.2 Kontrakce délek	11
2.3 Dilatace času	11
2.4 Relativita současnosti	12
2.5 Transformace rychlosti	12
2.6 „Paradoxy“ ve speciální relativitě	13
2.6.1 Paradox hodin (paradox dvojčat)	13
2.7 Otázka nadsvětelných rychlostí	15
2.7.1 Princip kauzality a relativnost současnosti	15
3 Fyzikální zákony v Minkowského prostoročasu	16
3.1 Prostoročas, událost a vlastní čas	16
3.1.1 Prostoročas, událost	16
3.1.2 Vlastní čas	16
3.2 Reálný čtyřrozměrný formalismus	16
3.2.1 Souřadnice	16
3.2.2 Minkowského tenzor (metrický tenzor)	17

3.2.3	Kontravariantní a kovariantní indexy	17
3.2.4	Zvyšování a snižování indexů	17
3.3	Světelný kužel, typy světočar a nadploch	17
3.4	Lorentzova transformace a její inverze	18
3.5	Transformační vlastnosti veličin, tenzory	21
4	Relativistická mechanika	23
4.1	Čtyř-rychlost	23
4.2	Relativistické srážky, závislost hmotnosti na relativní rychlosti, klidová hmotnost	23
4.3	Čtyř-hybnost	25
4.4	Pohybová rovnice a čtyř-síla	26
4.4.1	Porovnání s newtonovskou pohybovou rovnicí	26
4.5	Einsteinův vztah ekvivalence hmotnosti a energie	27
4.6	Vztah energie a hybnosti	28
4.7	Otázka (ne)konstantnosti klidové hmotnosti	28
5	Relativistická elektrodynamika ve vakuu	31
5.1	Klasická elektrodynamika ve třírozměrném prostoru	31
5.1.1	Klasická formulace Maxwellových rovnic	31
5.1.2	Lorentzova podmínka a rovnice kontinuity v třírozměrném prostoru	31
5.2	Čtyřrozměrný zápis elektrodynamiky	32
5.2.1	Čtyř-potenciál a Lorentzova podmínka, čtyř-proud a rovnice kontinuity	32
5.2.2	Vlnová rovnice	33
5.2.3	Vyjádření pole pomocí čtyř-potenciálu, tenzor EM pole	34
5.2.4	Maxwellovy rovnice	35
5.2.5	Relativita elektromagnetického pole	36
5.2.6	Lorentzova čtyř-síla	37
5.2.7	Hustota čtyř-síly	38
5.2.8	Rovinná harmonická EM vlna, vlnový čtyř-vektor	38
5.2.9	Tenzor energie a hybnosti elektromagnetického pole	39
6	Vzhled objektů ve speciální relativitě	41
6.1	Směr – aberace	41
6.2	Barva – Dopplerův jev	42
6.2.1	Podélný Dopplerův jev	42
6.2.2	Příčný Dopplerův jev	43
6.3	Tvar – deformace	43
7	Variační principy ve speciální teorii relativity	46

7.1	Virtuální posunutí	46
7.2	D'Alembertův princip a Lagrangeovy rovnice 1. druhu	46
7.3	Lagrangeova funkce a akce	47
7.4	Hamiltonův princip a Lagrangeovy rovnice 2. druhu	47
7.4.1	Variace polohy: $x^{*\mu}$	47
7.4.2	Variace změny času: $d\tau^*$	47
7.4.3	Variace čtyř-rychlosti: $u^{*\mu}$	48
7.4.4	Cesta k Lagrangeovým rovnicím 2. druhu ve speciální relativitě	49
7.5	Lagrangeova funkce a pohybové rovnice v konkrétních případech	50
7.5.1	Nabitá částice v EM poli	50
7.5.2	Variační odvození 1. sady Maxwellových rovnic	51

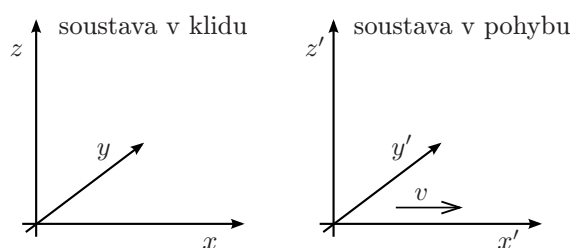
Tento dokument obsahuje přepsané zápisky z přednášky OFY023 Speciální teorie relativity, vznikl v průběhu vánočních prázdnin v akademickém roce 2003/2004. Objevíte-li nějakou chybu, dejte mi prosím vědět na mail jarka@schovan.net, do předmětu zprávy napište prosím STR.

Na současné podobě tohoto textu se podíleli Jaroslava Schovancová (původní verze z roku 2004), Vojtěch Vyklický (textové úpravy z roku 2006) a Vít Kučera (textové úpravy a obrázky z roku 2009).

Kapitola 1

Úvod, výchozí principy

1.1 Galileova transformace



Obrázek 1.1: Galileova transformace

Mějme nečárkovanou a čárkovanou soustavu souřadnic. Nechť se čárkovaná soustava pohybuje rychlostí \vec{v} vzhledem k nečárkované, přičemž v obou soustavách počátek měření času nastává v okamžiku splynutí počátků obou soustav (viz obr. 1.1), tj. $t_0 = t'_0 = 0$. Pokud nějaká událost nastala v bodě \vec{x} a čase t vzhledem k nečárkované soustavě, pak vzhledem k čárkované soustavě nastala v bodě \vec{x}' a v čase t' .

Podle Galileovy transformace je vztah mezi čárkovanými a nečárkovanými souřadnicemi

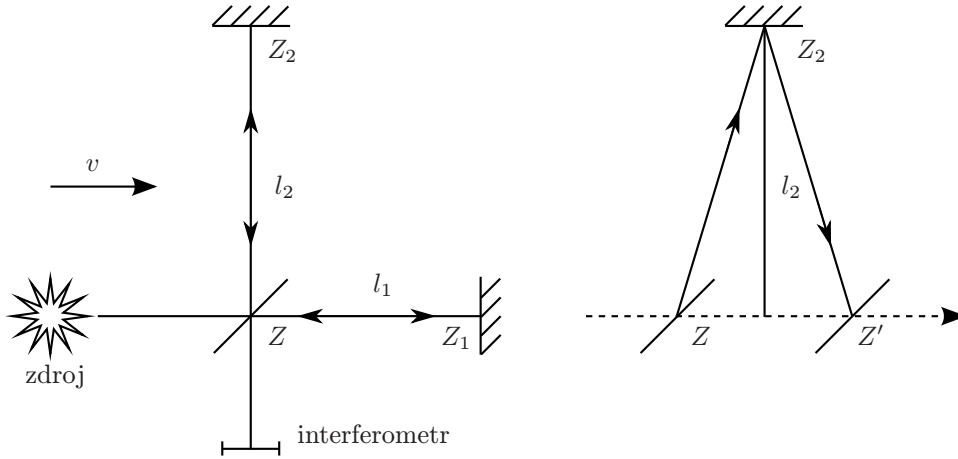
$$\begin{aligned}\vec{x}' &= \vec{x} - \vec{v}t, & \vec{v} &= \text{konst.}, \\ t' &= t, \\ \frac{d\vec{x}'}{dt} &= \frac{d\vec{x}}{dt} - \vec{v}, \\ \vec{a}' &= \vec{a}.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Pro oba pozorovatele každá událost nastává ve stejný čas (absolutní současnost), protože oboje hodiny jdou vůči sobě navzájem stále stejně rychle. Liší se tedy pouze místo, v němž událost nastala (relativní souměrnost).

1.2 Základní experimenty

1.2.1 Michelsonův-Morleyův pokus, Kennedyův-Thorndikeův pokus

Měření rychlosti světla v různých směrech. M-M: stejná délka ramen, 1881, 1887; K-T: různá délka ramen, 1932. Uspořádání dle obr. 1.2.



Obrázek 1.2: Michelsonův-Morleyův pokus

Nechť se soustava pohybuje vodorovným směrem rychlostí \vec{v} . Světlo ze zdroje rozdělíme na polopropustném zrcátku Z na svislou a vodorovnou část. Rameno 1 (délka l_1) je ve vodorovném směru, rameno 2 (délka l_2) ve svislém směru.

Doba, kterou světlo běží přes rameno 1 od zrcadla Z k zrcadlu Z_1 a zpět k Z , je

$$t_1 = \frac{l_1}{c-v} + \frac{l_1}{c+v} = \frac{l_1(c+v+c-v)}{c^2-v^2} = \frac{2l_1c}{c^2-v^2} = \frac{2l_1}{c} \cdot \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}. \quad (1.2)$$

Doba, kterou běží paprsek 2 přes rameno 2 (viz pravá část obr. 1.2, pomocí Pythagorovy věty pro pravoúhlý trojúhelník) je

$$t_2 = \frac{2l_2}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \quad (1.3)$$

Pošleme-li paprsky odražené od zrcadel Z_1 a Z_2 do interferometru, je časový posuv roven

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2}{c} \left(\frac{l_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{l_1}{1-\frac{v^2}{c^2}} \right). \quad (1.4)$$

Nyní pozorujeme, jestli se změní interferenční obrazec při prohození ramen 1 a 2:

$$\tilde{t}_2 = \frac{2l_2}{c} \cdot \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}, \quad (1.5)$$

$$\tilde{t}_1 = \frac{2l_1}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad (1.6)$$

$$\tilde{\Delta t} = \tilde{t}_2 - \tilde{t}_1 = \frac{2}{c} \left(\frac{l_2}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{l_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right). \quad (1.7)$$

Rozdíl $\tilde{\Delta t} - \Delta t$ tedy činí

$$\tilde{\Delta t} - \Delta t = \frac{2(l_1+l_2)}{c} \left(\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right). \quad (1.8)$$

Tedy posun interferenčních proužků by při konfiguraci $l_1 + l_2 \approx 50$ m, zdroj $\lambda = 500$ nm při zjišťování rychlosti pohybu Země vůči éteru měl být patrný. Výsledek pokusu byl ale NEGATIVNÍ (žádné posuny interferenčních obrazců nebyly naměřeny!!!). Tedy rychlost světla v různých směrech je konstantní.

1.2.2 Lorentzova kontrakční hypotéza

K vysvětlení výsledků M-M experimentu navrhli Fitzgerald, Larmor a nezávisle na nich Lorentz tzv. *kontrakční hypotézu*, podle níž se *rozměry všech těles ve směru jejich rychlosti vůči éteru deformují faktorem* $\left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)$, *a to nezávisle na materiálu tělesa.*

Tedy pro délku l_2 ve směru kolmém na pohyb soustavy platí vztah

$$l_2 = l_2^{\text{klid}}. \quad (1.9)$$

Pro délku l_1 ve směru rovnoběžném s pohybem soustavy platí dle kontrakční hypotézy vztah

$$l_1 = l_1^{\text{klid}} \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (1.10)$$

Tedy pro rozdíl $t_2 - t_1$ platí vztah

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (l_2^{\text{klid}} - l_1^{\text{klid}}). \quad (1.11)$$

1.2.3 Dilatační hypotéza

Pro naměřený časový rozdíl platí vztah

$$\Delta t_{\text{měřené}} = \Delta t \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (1.12)$$

Tedy

$$\Delta t_{\text{měřené}} = \frac{2}{c} (l_2^{\text{klid}} - l_1^{\text{klid}}). \quad (1.13)$$

Tedy $\Delta t_{\text{měřené}}$ nezávisí na rychlosti pohybu soustavy v !!!

1.2.4 Hoekův pokus

Uspořádání dle obr. 1.3. Rok 1868. Na jedno rameno je přidělána nádoba délky l s prostředím s indexem lomu n . Paprsek rozdělíme opět na vodorovnou a svislou část, obě necháme obéhnout celý okruh a pak je pošleme do interferometru.

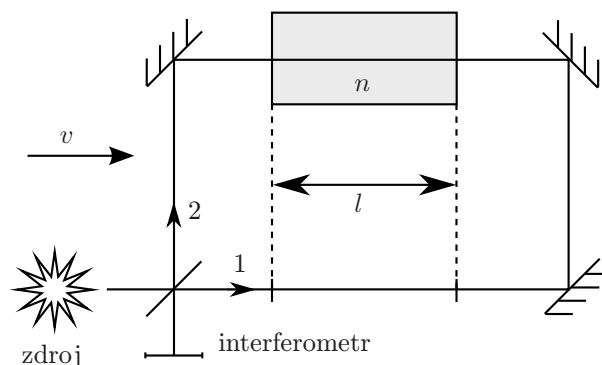
Nechť platí vztah

$$v_{\substack{\text{éter v krabici} \\ \text{vůči éteru vůkol}}} = \alpha v. \quad (1.14)$$

Veličina α nabývá následujících hodnot:

$$0 \leq \alpha \leq 1. \quad (1.15)$$

Pokud $\alpha = 0$, tak éter neví o prostředí. Pokud $\alpha = 1$, tak je éter úplně strháván prostředím.



Obrázek 1.3: Hoekův pokus

Doba, za kterou paprsek 1, obíhající okruh proti směru hodinových ručiček, prošel nádobou a s ní rovnoběžným úsekem vakua, je

$$t_1 = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{\frac{c}{n} + (1-\alpha)v}. \quad (1.16)$$

Doba, za kterou paprsek 2, obíhající okruh po směru hodinových ručiček, prošel nádobou a s ní rovnoběžným úsekem vakua, je

$$t_2 = \frac{l}{c+v} + \frac{l}{\frac{c}{n} - (1-\alpha)v}. \quad (1.17)$$

Tedy pro rozdíl $t_2 - t_1$ platí vztah

$$\begin{aligned} \Delta t &= t_2 - t_1 \\ &= \frac{l(c-v-(c+v))}{c^2-v^2} + \frac{l(\frac{c}{n}+(1-\alpha)v-\frac{c}{n}+(1-\alpha)v)}{\frac{c^2}{n^2}-(1-\alpha)^2v^2} \\ &= \frac{-2lv}{c^2-v^2} + \frac{2lv(1-\alpha)}{\frac{c^2}{n^2}-(1-\alpha)^2v^2} \\ &\stackrel{v^2 \ll c^2}{\approx} \frac{-2lv}{c^2} + \frac{2lv(1-\alpha)n^2}{c^2} \\ &= \frac{2lv}{c^2} \left((1-\alpha)n^2 - 1 \right). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Pro $\Delta t = 0$ můžeme určit Fresnelův strhávací koeficient:

$$\boxed{\alpha = 1 - \frac{1}{n^2}}. \quad (1.19)$$

1.3 Výchozí principy STR

Předpoklady:

- VOLNÉ HMOTNÉ BODY – ZANEDBÁNÍ GRAVITAČNÍHO POLE
- IDEÁLNÍ TUHÉ TYČE
- IDEÁLNÍ HODINY

1.3.1 První Newtonův zákon

Existuje (kartézský) referenční systém, vůči němuž se volný hmotný bod pohybuje rovnoměrně přímočaře – INERCIÁLNÍ SYSTÉM.

1.3.2 Princip speciální relativity

Ve všech inerciálních systémech platí stejné fyzikální zákony.

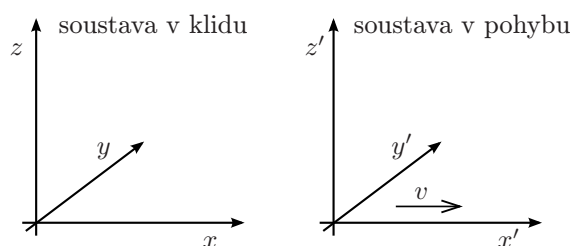
1.3.3 Princip konstantní rychlosti světla

Ve vakuu se elektromagnetické vlnění šíří vůči všem inerciálním systémům stejnou rychlostí c , nezávisle na zdroji.

Kapitola 2

Lorentzova transformace a její bezprostřední důsledky

2.1 Speciální Lorentzova transformace



Obrázek 2.1: Speciální Lorentzova transformace

Předpokládáme, že souřadnicový systém IS' se pohybuje vzhledem k systému IS rychlostí v ve směru osy x (viz obr. 2.1). Na rozdíl od klasického principu relativity, kde se transformuje pouze prostorová souřadnice, je ve speciální teorii relativity prostorová a časová souřadnice postavená na stejnou úroveň. Tedy transformace má tvar

$$\begin{aligned}t' &= At + Bx, \\x' &= Ct + Dx, \\y' &= y, \\z' &= z.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Transformace musí dále splňovat Einsteinův postulát, který říká, že ve všech souřadných soustavách je rychlost světla c stejná, tedy pro čelo světelné vlny vzniklé v centru souřadnic v okamžiku, kdy se systémy míjí, musí platit

$$\begin{aligned}x &= ct, \\x' &= ct'.\end{aligned}\tag{2.2}$$

Pro počátek čárkované soustavy IS' platí

$$x' = 0, \quad x = vt.\tag{2.3}$$

Dosadíme-li z (2.1) do (2.3), dostaneme vztah

$$x' = 0 = Ct + Dvt = t(C + Dv) \Rightarrow C = -Dv.\tag{2.4}$$

Jelikož stejné fyzikální zákony musí platit ve všech inerciálních systémech a z předpokladu (2.2) získáme vztahy pro x' a x , kde $v' = -v$:

$$\begin{aligned}x' &= D(x - vt), \\x &= D(x' - v't') = D(x' + vt').\end{aligned}\tag{2.5}$$

Řešme nyní soustavu (2.2):

$$\begin{array}{l}x = ct \\x' = ct' \quad / \cdot x \\ \hline xx' = c^2 tt'\end{array}$$

(2.6)

dosadíme např. do 1. rovnice z (2.5):

$$\begin{aligned}c^2 tt' &= D^2(ct - vt)(ct' + vt') \quad / : (tt') \\c^2 &= D^2(c^2 - v^2) \Rightarrow \\ \Rightarrow D &= \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\end{aligned}$$

Tedy získali jsme vztah pro Lorentzův faktor γ :

$$\boxed{\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},}\tag{2.7}$$

kde znaménko $+$ se bere z důvodu identity transformace pro $v = 0$.

Vztah (2.5) můžeme nyní upravit na

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - vt), \\x &= \gamma(x' + vt').\end{aligned}\tag{2.8}$$

Nyní odvodíme transformační vztah pro t' : první rovnici ze soustavy (2.8) vynásobíme Lorentzovým faktorem γ a potom obě rovnice sečteme:

$$\begin{array}{l}x' = \gamma(x - vt) \quad / \cdot \gamma \\x = \gamma(x' + vt') \\ \hline x'\gamma = \gamma^2(x - vt) \\x = \gamma(x' + vt') \\ \hline \text{sečteme:} \\ \gamma x' + x = \gamma^2 x - \gamma^2 vt + \gamma x' + \gamma vt' \\ x(1 - \gamma^2) = \gamma^2 vt + \gamma vt'\end{array}$$

(2.9)

kde $1 - \gamma^2 = 1 - \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1 - \frac{v^2}{c^2} - 1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = -\frac{v^2}{c^2} \gamma^2$

$$x\left(-\frac{v^2}{c^2} \gamma^2\right) = \gamma^2 vt + \gamma vt'$$

odkud (po vydělení $(v\gamma)$)

$$\boxed{t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x\right)}$$

Analogicky odvodíme vztah pro t : druhou rovnici ze soustavy (2.8) vynásobíme Lorentzovým faktorem

γ a potom obě rovnice sečteme:

$$\begin{array}{r}
 x' = \gamma(x - vt) \\
 x = \gamma(x' + vt') \quad / \cdot \gamma \\
 \hline
 x' = \gamma(x - vt) \\
 x\gamma = \gamma^2(x' + vt') \\
 \hline
 \text{sečteme:} \\
 \gamma x + x' = \gamma x - \gamma vt + \gamma^2 x' + \gamma^2 vt' \\
 x'(1 - \gamma^2) = -\gamma vt + \gamma^2 vt' \\
 \hline
 \text{kde } 1 - \gamma^2 = -\frac{v^2}{c^2} \gamma^2 \\
 x'(-\frac{v^2}{c^2} \gamma^2) = -\gamma vt + \gamma^2 vt' \\
 \text{odkud (po vydělení } (v\gamma)) \\
 \boxed{t = \gamma \left(t' + \frac{v}{c^2} x' \right)}
 \end{array} \tag{2.10}$$

Tedy SPECIÁLNÍ LORENTZOVA TRANSFORMACE (dále také (speciální) LT) má tvar

$$\boxed{\begin{array}{l} t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right) \\ x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \end{array}}, \text{ maticově } \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \frac{v}{c} & 0 & 0 \\ -\gamma \frac{v}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

INVERZNÍ SPECIÁLNÍ LORENTZOVA TRANSFORMACE má tvar

$$\boxed{\begin{array}{l} t = \gamma \left(t' + \frac{v}{c^2} x' \right) \\ x = \gamma(x' + vt') \\ y = y' \\ z = z' \end{array}}, \text{ maticově } \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & +\gamma \frac{v}{c} & 0 & 0 \\ +\gamma \frac{v}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

2.2 Kontrakce délek

Mějme IS a IS' v uspořádání dle obr. 2.1. Mějme tyč délky $l_0 = \Delta x'$. Pak díky linearitě spec. LT platí pro její délku vztah

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t). \tag{2.13}$$

Δ znamená rozdíl mezi údajem odečteném na jednom a druhém konci. Dále měříme polohu konců současně! ($\Delta t = 0$). Tedy předchozí vztah upravíme na

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v \underbrace{\Delta t}_{=0}) = \gamma \Delta x. \tag{2.14}$$

Jelikož $\Delta x' = l_0$ a $\Delta x = l$, pak také

$$\boxed{l_0 = \gamma l = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \geq l, \tag{2.15}$$

tedy dochází ke KONTRAKCI DÉLEK.

2.3 Dilatace času

Mějme IS a IS' v uspořádání dle obr. 2.1. Mějme hodiny, které stojí vzhledem k IS' a měří čas $\Delta t' (\equiv \Delta \tau)$, kde τ je tzv. VLASTNÍ ČAS. Pak díky linearitě spec. LT platí pro čas naměřený v nečárkované soustavě vztah

$$\Delta t = \gamma(\Delta t' + \frac{v}{c^2} \Delta x'). \tag{2.16}$$

Jelikož se hodiny vzhledem k IS' nepohybují, platí $\Delta x' = 0$. Potom předchozí vztah upravíme na

$$\Delta t = \gamma(\Delta t' + \underbrace{\frac{v}{c^2} \Delta x'}_{=0}) = \gamma \Delta t'. \quad (2.17)$$

Jelikož $\Delta t' = \Delta \tau$, platí

$$\Delta t = \gamma \Delta t' = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \geq \Delta \tau. \quad (2.18)$$

2.4 Relativita současnosti

[1] Mějme IS a IS' dle obr. 2.1. Mějme dvě bodové události A a B , které jsou v inerciálním systému IS určeny souřadnicemi x_A, y_A, z_A, t_A a x_B, y_B, z_B, t_B . Potom dle vztahů (2.11) pro speciální LT platí

$$t'_B - t'_A = \gamma \left[t_B - t_A - \frac{v}{c^2} (x_B - x_A) \right]. \quad (2.19)$$

Nechť $t_B = t_A$, tj. události A a B nastaly dle údajů místních hodin systému IS *současně*. Ze vztahu (2.19) pak vidíme, že pozorovateli v systému IS' se tyto události *nejeví současně*, je-li $x_B \neq x_A$.

Nechť např. $x_B > x_A$. Pak dle (2.19) máme $t'_B < t'_A$, tj. událost v místě ležícím ve směru pohybu systému IS' *nastala* podle údaje souměstných hodin pevných v systému IS' *dříve*. Z toho dále plyne, že časový sled dvou událostí A, B , které jsou v jednom inerciálním systému IS současné, může být v různých systémech různý. Např. v systému IS'', který se vůči IS pohybuje podobně jako IS', ale v opačném směru, platí $t''_A < t''_B$.

Všimněme si, že dle vztahů pro speciální LT platí při $t_B = t_A$ vztah

$$x'_B - x'_A = \gamma(x_B - x_A). \quad (2.20)$$

Dále si všimněme, že difference souřadnic událostí A, B mají ve všech systémech IS' tatáž znaménka jako v systému IS. Dále ze vztahů pro speciální LT plyne, že vzdálenost míst, v nichž nastaly události A, B , je nejmenší právě pro pozorovatele v systému IS, v němž jsou události současné, neboť při $v \neq 0$ je $\gamma > 1$.

Ze vztahu (2.19) při $t_B = t_A$ a ze vztahu (2.20) plyne nerovnost

$$|t'_B - t'_A| = \gamma \left| \frac{v}{c^2} \right| |x_B - x_A| \leq \left| \frac{v}{c^2} \right| |x'_B - x'_A| < \frac{1}{c} |\vec{x}'_B - \vec{x}'_A|. \quad (2.21)$$

Jsou-li tedy dvě události A, B v určitém IS současné, pak v žádném jiném takovém systému IS' nemůže být jejich časový rozdíl větší než doba, kterou potřebuje světlo, aby dospělo z místa jedné události do místa události druhé.

Obráceně: Platí-li v nějakém inerciálním systému IS' mezi souřadnicemi a dobami dvou událostí A, B nerovnost (2.21), lze nalézt inerciální systém IS, v němž se tyto události jeví současnými. Lze rovněž nalézt systém IS'', v němž se události A, B jeví v obráceném časovém pořadí než v systému IS'. Také platí, že dvě události C a D , jejichž časy a souřadnice v systému IS splňují nerovnost

$$|t_D - t_C| \geq \frac{1}{c} |\vec{x}_D - \vec{x}_C|. \quad (2.22)$$

mají časové pořadí stejné ve všech inerciálních systémech.

2.5 Transformace rychlosti

Nechť se bod M v systému IS pohybuje obecně dle rovnice

$$x_j(M, t) = f_j(t). \quad (2.23)$$

Jeho pohyb vůči systému IS' je pak určen rovnicemi

$$\begin{aligned}x'(M, t') &= \gamma[x(M, t) - vt], \\y'(M, t') &= y(M, t), \\z'(M, t') &= z(M, t), \\t' &= \gamma \left[t - \frac{v}{c^2} x(M, t) \right].\end{aligned}\tag{2.24}$$

Definujeme-li složky rychlosti bodu M vůči IS a IS' vzorci

$$\begin{aligned}u_j &= \frac{dx_j}{dt}, \\u'_j &= \frac{dx'_j}{dt'}\end{aligned}\tag{2.25}$$

plyne z rovnice (2.24)

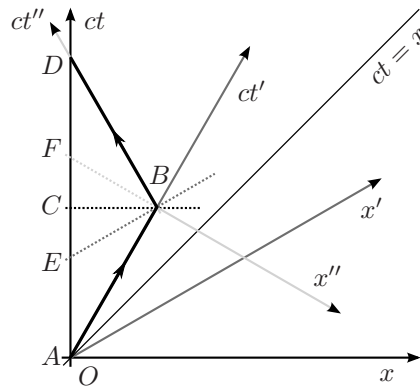
$$\begin{aligned}\frac{dt'}{dt} &= \gamma \left(1 - \frac{vu_x}{c^2} \right) \\u'_x &= \gamma(u_x - v) \frac{dt}{dt'} = (u_x - v) \left(1 - \frac{vu_x}{c^2} \right)^{-1} \\u'_y &= u_y \gamma^{-1} \left(1 - \frac{vu_x}{c^2} \right)^{-1} \\u'_z &= u_z \gamma^{-1} \left(1 - \frac{vu_x}{c^2} \right)^{-1}\end{aligned}\tag{2.26}$$

Speciálně necht $\vec{u}' = (u', 0, 0)$ a $\vec{u} = (u, 0, 0)$. Potom platí

$$\frac{c - u'}{c + u'} = \frac{c - u}{c + u} \cdot \frac{c + v}{c - v}\tag{2.27}$$

2.6 „Paradoxy“ ve speciální relativitě

2.6.1 Paradox hodin (paradox dvojčat)



Obrázek 2.2: Paradox dvojčat

[2] Z počátku O inerciálního systému IS startuje v čase $t = t_A = 0$ kosmická loď ve směru osy x (start = bodová událost A). V krátké době nabude loď velké rychlosti $v < c$ a touto konstantní rychlostí se velmi dlouho pohybuje. Potom se bržděním rychle zastaví (obrat = bodová událost B) a stejným způsobem se vrátí do bodu O (přistání = bodová událost D). Kosmonaut veze s sebou svoje hodiny $H_{(K)}$, které udávají

jeho vlastní čas a při startu ukazují také nulu ($\tau_A = 0$). Otázka je, jaký čas τ_D budou tyto hodiny ukazovat po návratu do 0 v době t_D udávané hodinami $H_{(O)}$ umístěnými v O (které při startu ukazovaly čas $t_A = 0$).

Budeme předpokládat, že hodiny $H_{(K)}$ jsou sestrojeny tak, že jsou prakticky necitlivé na zrychlení vůči IS vyvolané vnější mechanickou (negravitační) silou, která na ně působí při uvádění kosmické lodi do pohybu a při jejím zastavování.

Můžeme si úlohu zjednodušit a předpokládat, že zrychlení při startu a při brždění jsou velika a že ty operace trvají dobu zanedbatelně krátkou proti trvání celé cesty. Jinými slovy můžeme předpokládat, že kosmická loď na cestě tam i zpět je prakticky stále v pohybu vůči IS konstantní rychlostí v . Je-li na cestě tam dobu $t_B = T$, doletí do vzdálenosti $x_B \doteq vT$ a vrátí se do O v době $t_D = 2T$. Za těchto předpokladů bude z pohledu pozorovatele stojícího v IS prakticky stále platit $d\tau = \gamma^{-1} dt$ a tedy také

$$\tau_D = \gamma^{-1} t_D < t_D. \quad (2.28)$$

Stejný výsledek však musí vyjít i při výpočtu provedeném v libovolném jiném inerciálním systému, neboť údaje obojích hodin $H_{(O)}$ a $H_{(K)}$ při jejich setkání po návratu jsou absolutním faktem.

Zdánlivý paradox vzniká, teprve když se počítá (nesprávným způsobem) z hlediska „klidového systému“ kosmické lodi. Při takovém výpočtu se předpokládá, že kosmonaut má právo „podle principu relativity“ usuzovat takto: Téměř po celou dobu cesty tam i zpět (s výjimkou krátkého období okolo startu a obratu) je můj klidový systém prakticky stále inerciální a hodiny $H_{(O)}$ se vůči němu pohybují rychlostí v . Tedy přírůstky $dt(H_{(O)})$ údaje těch hodin menší než přírůstky času v mém klidovém systému. Při návratu tedy naleznou hodiny v O opožděny oproti mým hodinám, tj. $t_D = \gamma^{-1} \tau_D < \tau_D$, ve sporu s nerovností (2.28).

Vysvětlení „paradoxu hodin“ se musí hledat v tom, že „kosmonautův výpočet“ je chybný.

Chyba totiž vznikla tím, že byla zanedbána relativnost současnosti. Při výpočtu z hlediska „klidového systému“ kosmické lodi se musí přihlížet k tomu, že systém IS' , v němž je kosmická loď v klidu mezi startem A a obratem B , a systémem IS'' , v němž je v klidu mezi obratem B a návratem D , jsou sice oba inerciální, ale různé systémy, takže pojmy současnosti v nich nesouhlasí ani navzájem ani s pojmem současnosti v systému IS. Tak např. událost C v bodě O , která je určena údajem

$$t_C = T = \frac{1}{2} t_D = \frac{1}{2} \Delta t_{AD} \quad (2.29)$$

hodin $H_{(O)}$, a je tedy v systému IS současná s událostí B , není s B současná v IS' ani v IS'' . V systému IS' , popř. IS'' je událost C pozdější (popř. dřívější) než událost B (viz obr. 2.2). Obráceně, událost E (popř. F) v bodě O , která je v systému IS' (popř. IS'') současná s B , je v systému IS dřívější (popř. pozdější) než B nebo s ní současná C .

Hodiny $H_{(O)}$ se vůči IS' i vůči IS'' pohybují rychlostí v (opačnými směry), a proto se vskutku i vůči hodinám systému IS' i vůči hodinám systému IS'' opožďují podle $dt(H_{(O)}) = \gamma^{-1} dt'$ popř. $dt(H_{(O)}) = \gamma^{-1} dt''$. Platí tedy

$$\Delta t_{AE} = \gamma^{-1} \Delta t'_{AE} = \gamma^{-1} \Delta \tau_{AB}, \quad (2.30)$$

neboť mezi A a B jsou hodiny $H_{(K)}$ hodinami v systému IS' a události E a B jsou současné v IS' . Z podobných důvodů platí

$$\Delta t_{FD} = \gamma^{-1} \Delta t''_{FD} = \gamma^{-1} \Delta \tau_{BD}, \quad (2.31)$$

a tedy

$$\Delta t_{AB} + \Delta t_{FD} = \gamma^{-1} \Delta \tau_{AD} = \gamma^{-1} \tau_D. \quad (2.32)$$

Pravá strana této rovnice již obsahuje hledanou veličinu τ_D , ale levá strana ještě není rovna $\Delta t_{AD} = t_D$, neboť mezi událostmi E a F je časová „mezera“ Δt_{EF} . Platí tedy

$$t_D = \gamma^{-1} \tau_D + \Delta t_{EF}. \quad (2.33)$$

Protože

$$\Delta t_{EF} = \Delta t_{EC} + \Delta t_{CF} = 2\Delta t_{EC} = 2\Delta t_{EB}, \quad (2.34)$$

zbývá vyjádřit Δt_{EB} pomocí τ_D . K tomu dojdeme touto úvahou: Systém IS souvisí se systémem IS' inverzní LT, takže platí

$$\Delta t = \gamma \left(\Delta t' + \Delta x' \frac{v}{c^2} \right). \quad (2.35)$$

Pro události E, B je však $\Delta t' = 0$ a $\Delta x'$ je vzdálenost, do níž se v systému IS' vzdálil počátek O od hodin $H_{(K)}$ v okamžiku $t' = t'_B = \tau_B = \frac{1}{2}\tau_D$. Tato vzdálenost se však rovná $v \cdot \frac{1}{2}\tau_D$. Když ji dosadíme do hořejší rovnice, dostáváme $\Delta t_{EB} = \frac{1}{2}\gamma\frac{v^2}{c^2}\tau_D$, a nakonec ze (2.33)

$$t_D = \gamma^{-1}\tau_D + \gamma\frac{v^2}{c^2}\tau_D = \gamma\tau_D. \quad (2.36)$$

Vidíme tedy, že po opravě přehlédnutí mezery Δt_{EF} dostáváme shodu se vzorcem (2.28), i když vyjdeme z toho, že se hodiny $H_{(O)}$ v „klidovém systému“ kosmické lodi zpožďují.

2.7 Otázka nadsvětelných rychlostí

2.7.1 Princip kauzality a relativnost současnosti

[3] PRINCIP KAUZALITY vyžaduje, aby následek nemohl nikdy nastat dříve než příčina. Nechtě dvě události A a B splňují $t_A = t_B$, $\vec{x}_A \neq \vec{x}_B$. Kdyby událost A měla být příčinou (nebo následkem) události B , vznikl by rozpor mezi Einsteinovým principem relativity a principem kauzality. Rozpor by spočíval v tom, že z hlediska jiného systému IS' (nebo IS''), fyzikálně rovnoprávného se systémem IS , následek by časově předcházel před svou příčinou.

Aby k takovým rozporům nedocházelo, stačí, aby byla zásadně vyloučena možnost přímé příčinné souvislosti dvou událostí, jejichž souřadnice a časy splňují nerovnost (2.21). Jako příčina a následek mohou spolu souviset pouze události, jejichž „data“ splňují nerovnost (2.22) a jejichž časové pořadí je proto absolutní.

Aby však byla znemožněna příčinná souvislost událostí A, B splňující podmínku (2.21), je nutné, aby nebylo možno přenášet rychlostí větší, než je rychlost světla c , jakékoliv působení nebo vlivy schopné vyvolat „událost“. Jinými slovy: Vzájemné působení (interakce) mezi objekty může probíhat pouze rychlostí $v \leq c$. To je obecná, nutná a postačující podmínka, za které se Einsteinova teorie relativity snáší s principem kauzality.

Prakticky a konkrétně to znamená, že nemohu např. existovat síly působící přímo do dálky (okamžitě). Nemůže tedy přesně platit ani Newtonův gravitační zákon ani podobné jiné zákony sil používané v Newtonově mechanice. Ani nemohou existovat ideálně tuhá tělesa (tyče) a signály šířící se nadsvětelnou rychlostí.

Kapitola 3

Fyzikální zákony v Minkowského prostoročasu

Poznámky:

- Používáme Einsteinovo sumační pravidlo.
- Řecké indexy nabývají hodnot 0, 1, 2, 3.
- Latinské indexy nabývají hodnot 1, 2, 3.

3.1 Prostorčas, událost a vlastní čas

3.1.1 Prostorčas, událost

Minkowski:

Nikdo nepozoroval nějaké místo jinak než v určitém čase a čas jinak než v určitém místě.

Světobody, bodové události: čtveřice údajů (t, x, y, z) , popř. x^μ , $\mu = 0, 1, 2, 3$

Prostorčas: množina všech světobodů

3.1.2 Vlastní čas

Systém IS_0 , kterému říkáme *klidový* nebo *vlastní systém tělesa M* , je pro popis fyzikálních jevů na tomto tělese systémem význačným. Čas

$$\tau = t_0 = \gamma^{-1}t \quad (3.1)$$

udávaný hodinami pohybujícími se s tělesem M se nazývá *vlastním časem* tohoto tělesa (hmotného bodu).

3.2 Reálný čtyřrozměrný formalismus

3.2.1 Souřadnice

Polohový vektor:

$$x^\mu \equiv (ct, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3) \quad (3.2)$$

3.2.2 Minkowského tenzor (metrický tenzor)

Minkowského (metrický tenzor):

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Platí vztah

$$\eta^{\alpha\beta}\eta_{\beta\rho} = \delta^{\alpha}_{\rho}. \quad (3.4)$$

3.2.3 Kontravariantní a kovariantní indexy

Kontravariantní index ... horní.

Kovariantní index ... dolní.

3.2.4 Zvyšování a snižování indexů

Platí

$$\eta^{\alpha\beta}X_{\beta} = X^{\alpha}. \quad (3.5)$$

Dále platí

$$\underbrace{\eta_{\mu\nu}A^{\mu}}_{A_{\nu}}B^{\nu} = \underbrace{(A^{\mu}\eta_{\mu\nu}B^{\nu})}_{\text{například}} = A_{\nu}B^{\nu} = \underbrace{A^{\mu}}_{\eta^{\mu\alpha}A_{\alpha}}B_{\mu} = \eta^{\mu\alpha}A_{\alpha}B_{\mu}. \quad (3.6)$$

Prostoročasový interval ds , vyjadřující prostoročasovou odlehlost („čtyřrozměrnou vzdálenost“) dvou událostí, jejichž souřadnice se liší o dx^{μ} , se počítá dle vztahu

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta}dx^{\alpha}dx^{\beta} \quad (3.7)$$

nebo také

$$ds^2 = \eta^{\alpha\beta}dx_{\alpha}dx_{\beta}, \quad (3.8)$$

kde

$$dx_{\alpha} = \eta_{\alpha\mu}dx^{\mu} = (-cdt, dx, dy, dz). \quad (3.9)$$

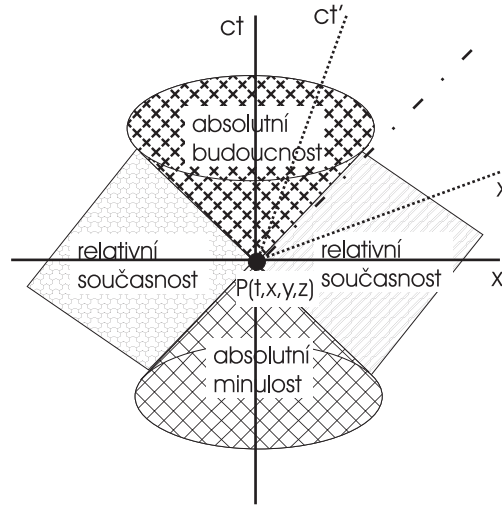
3.3 Světelný kužel, typy světočar a nadploch

Viz obr. 3.1. Přímkami $ct = \pm x$ rozdělují uvažovanou Minkowského rovinu na čtyři invariantní kvadranty. V těch, jimiž procházejí časové osy ct a ct' , leží světobody, které mají od počátku $O \equiv O'$ imaginární prostoročasový interval, a jsou vůči němu buď absolutně minulé (v dolním kvadrantu), nebo absolutně budoucí (v horním kvadrantu).

V těch kvadrantech mezi přímkami $ct = \pm x$, jimiž procházejí osy x a x' , leží světobody, které mají reálný prostoročasový interval; jsou relativně současné s počátkem.

Je-li časoprostorový interval imaginární, nazýváme jej též interval časového charakteru. Je-li časoprostorový interval reálný, nazýváme jej též interval prostorového charakteru. Interval je veličina absolutní, nezávislá na volbě systému souřadnic, kdežto časové rozdíly a prostorové vzdálenosti jsou jen relativní (závislé na volbě souřadnic).

Mějme bodovou událost, kterou umístíme do počátku. Pak signál, který se pohybuje podél povrchu světelného kužele, se pohybuje rychlostí světla.



Obrázek 3.1: Světelný kužel

Tedy:

$$\|V^\nu\|^2 = \eta_{\mu\nu} V^\mu V^\nu = \begin{cases} < 0 & \dots \text{časupodobný} \\ = 0 & \dots \text{nulový} \equiv \text{světelný} \\ > 0 & \dots \text{prostorupodobný} \end{cases} \quad (3.10)$$

$$V^\mu = (-1, 1, 0, 0) \quad (3.11)$$

$$-(V^0)^2 + (V^1)^2 = 0$$

Také

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \begin{matrix} > \\ = 0 \\ < \end{matrix} \bigg/ \frac{1}{dt^2}, \quad (3.12)$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = -c^2 + v^2 \begin{matrix} > \\ = 0 \\ < \end{matrix} \Leftrightarrow v^2 \begin{matrix} > \\ = c^2 \\ < \end{matrix}$$

přičemž z toho, že velikost c je invariant, plyne, že i znaménko $>$, resp. $=$, resp. $<$ mezi v a c nezávisí na volbě pozorovatele.

Dále definujeme:

$$x^\mu(t) \dots \text{světločára} \text{ — trajektorie bodu v prostoročasu} \quad (3.13)$$

3.4 Lorentzova transformace a její inverze

Interval je veličina absolutní, nezávislá na volbě systému souřadnic:

$$ds'^2 = ds^2. \quad (3.14)$$

Tedy

$$\left. \begin{aligned} \underbrace{\eta_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu}_{= \eta_{\mu\nu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} dx^\beta} &= \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\eta_{\mu\nu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} = \eta_{\alpha\beta}} \quad (3.15)$$

Poznámka. Značení parciální derivace:

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial x^\rho} \equiv x^\mu_{,\rho} \quad (3.16)$$

Čárkované souřadnice budu teď chvíli značit vlnkou, aby se nepletly derivace a čárkované souřadnice!!!

Nyní parciálně zderivujeme orámovaný výsledek vztahu (3.15) podle x^ρ :

$$\eta_{\mu\nu} \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\beta} = \eta_{\alpha\beta} \quad / \frac{\partial}{\partial x^\rho}$$

Získáme tak tři rovnice:

$$0 = \eta_{\alpha\beta,\rho} = \eta_{\mu\nu} \left(\frac{\partial^2 \tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\rho} \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\beta} + \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 \tilde{x}^\nu}{\partial x^\beta \partial x^\rho} \right) \quad / \oplus \quad (3.17)$$

$$0 = \eta_{\rho\alpha,\beta} = \eta_{\mu\nu} \left(\frac{\partial^2 \tilde{x}^\mu}{\partial x^\rho \partial x^\beta} \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial^2 \tilde{x}^\nu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \right) \quad / \oplus \quad (3.18)$$

$$0 = \eta_{\beta\rho,\alpha} = \eta_{\mu\nu} \left(\frac{\partial^2 \tilde{x}^\mu}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\rho} + \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\beta} \frac{\partial^2 \tilde{x}^\nu}{\partial x^\alpha \partial x^\rho} \right) \quad / \ominus \quad (3.19)$$

Teď se budeme zabývat částí rovnic v trojitém rámečku:

$$\eta_{\mu\nu} \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial^2 \tilde{x}^\nu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} - \eta_{\mu\nu} \frac{\partial^2 \tilde{x}^\mu}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\rho} = 0$$

Víme, že μ, ν jsou sčítací indexy, tedy můžeme je nazvat jak chceme: $\mu\nu = \nu\mu$. Jelikož $\eta_{\mu\nu} = \eta_{\nu\mu}$, provedeme výměnu indexů $\mu \leftrightarrow \nu$. Potom ale musíme provést výměnu indexů $\alpha \leftrightarrow \beta$. Druhý sčítanec předchozí rovnice upravíme dle předcházející věty a rovnice bude ve tvaru

$$\eta_{\mu\nu} \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial^2 \tilde{x}^\nu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} - \eta_{\nu\mu} \frac{\partial^2 \tilde{x}^{\mu\nu}}{\partial x^{\beta\alpha}} \frac{\partial \tilde{x}^{\nu\mu}}{\partial x^\rho} = 0. \quad (3.20)$$

Teď se budeme zabývat částí rovnic v jednoduchém rámečku:

$$\eta_{\mu\nu} \frac{\partial^2 \tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\rho} \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\beta} - \eta_{\mu\nu} \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\beta} \frac{\partial^2 \tilde{x}^\nu}{\partial x^\rho \partial x^\alpha} = 0. \quad (3.21)$$

Teď se budeme zabývat částí rovnic v dvojitém rámečku:

$$\eta_{\mu\nu} \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 \tilde{x}^\nu}{\partial x^\beta \partial x^\rho} + \eta_{\mu\nu} \frac{\partial^2 \tilde{x}^\mu}{\partial x^\rho \partial x^\beta} \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\alpha}.$$

Po aplikaci pravidel o výměně indexů získáme vztah

$$2\eta_{\mu\nu} \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 \tilde{x}^\nu}{\partial x^\beta \partial x^\rho} = 0. \quad (3.22)$$

Nyní zkusme

$$\eta_{\mu\nu} \underbrace{\frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^0}}_{=ct} \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^0} = \underbrace{\eta_{00}}_{=-1}.$$

Mějme čtyři vektory:

$$\underbrace{\frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^0}}_{\text{časupodobný čtyř-vektor}}, \quad \underbrace{\frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^1}}_{\text{prostorupodobný čtyř-vektor}}, \quad \underbrace{\frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^2}}_{\text{prostorupodobný čtyř-vektor}}, \quad \underbrace{\frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^3}}_{\text{prostorupodobný čtyř-vektor}} \quad (3.23)$$

- Mezi těmito čtyřmi vektory (viz (3.23)) dělám skalární součin, vzorec (3.15) mi řekne, co vyjde.
- Tyto čtyři vektory jsou na sebe kolmé, jsou „normalizované“.
- Čtyři kolmé vektory ve čtyřrozměrném prostoročasu, žádný z nich není světelný vektor.
- Není více než čtyři navzájem kolmé vektory.
- Výraz (3.22) vyjadřuje, že jsou čtyři.
- Z výrazu (3.22) plyne LINEARITA TRANSFORMACE (!!!):

$$\frac{\partial^2 \tilde{x}^\nu}{\partial x^\beta \partial x^\rho} = 0 \quad (3.24)$$

(druhé derivace lineární funkce jsou nulové :-)

- Transformační parametr je vzájemná rychlost:

$$\tilde{x}^\mu = \underbrace{\frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha}}_{(*)} x^\alpha, \quad (3.25)$$

kde

$$(*) \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha}$$

je invariantní matice přechodu, matice závisí na rychlosti, nezávisí na souřadnicích.

- Matice transformace:

$$\Lambda^\mu_\alpha = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \quad (3.26)$$

- Přepis: RELACE ORTOGONALITY:

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta = \eta_{\alpha\beta} \quad (3.27)$$

LORENTZOVA TRANSFORMACE

x' znamená čárkovanou souřadnici!!!

$$\boxed{x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}} \quad (3.28)$$

Příklad.

$$ct' = \gamma(ct - \frac{v}{c}x)$$

$$x' = \gamma(x - vt)$$

Ve 4D: ($y = y', z = z'$)

$$x'^0 = \underbrace{\Lambda^0_0}_{\gamma} ct + \underbrace{\Lambda^0_1}_{-\gamma \frac{v}{c}} x + \underbrace{\Lambda^0_2}_0 y + \underbrace{\Lambda^0_3}_0 z$$

$$x'^1 = \underbrace{\Lambda^1_0}_{-\gamma \frac{v}{c}} ct + \underbrace{\Lambda^1_1}_{\gamma} x + \underbrace{\Lambda^1_2}_0 y + \underbrace{\Lambda^1_3}_0 z$$

Tedy Λ^{μ}_{ν} pro speciální LT má tvar

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \frac{v}{c} & 0 & 0 \\ -\gamma \frac{v}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

INVERZNÍ LORENTZOVA TRANSFORMACE

LT napíšeme jako

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}.$$

Rozepíšeme ji

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta} = \eta_{\alpha\beta} / \cdot \eta^{\beta\rho},$$

$$\eta^{\beta\rho} \eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta} = \underbrace{\eta_{\alpha\beta} \eta^{\beta\rho}}_{\delta_{\alpha}^{\rho}},$$

kde

$$\eta^{\beta\rho} \eta_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}_{\beta}$$

je inverzní LT:

$$\boxed{(\Lambda^{-1})^{\rho}_{\mu} = \Lambda^{\rho}_{\mu} \quad x^{\rho} = \Lambda^{\rho}_{\mu} x'^{\mu}}. \quad (3.30)$$

3.5 Transformační vlastnosti veličin, tenzory

Nejdůležitější část přednášky: „tenzor = tenzor“

Skalár (invariant):

$$\Phi'(x') = \Phi(x)$$

Čtyř-vektory:

$$A'^{\mu}(x') = \Lambda^{\mu}_{\nu} A^{\nu}(x)$$

$$B'_{\alpha}(x') = \Lambda_{\alpha}^{\beta} B_{\beta}(x)$$

Obecný tenzor:

$$T'^{\dots\mu\dots}_{\dots\alpha\dots}(x') = \dots \Lambda^{\mu}_{\nu} \dots \Lambda_{\alpha}^{\beta} \dots T^{\dots\nu\dots}_{\dots\beta\dots}(x)$$

Poznámka: Parciální derivace (gradient):

$$V'^{\dots}_{\dots,\rho} = ?$$

Tedy

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\rho}} = \underbrace{\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\rho}}}_{\text{inverzní LT}} \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} = \Lambda_{\rho}^{\sigma} \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}.$$

Provedme substituci

$$dx'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} dx^{\nu}$$

a dosazením dostáváme

$$dx'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} dx^{\nu},$$

neboť LT je lineární.

Tedy

$$\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\rho}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\nu}} = \delta_{\nu}^{\sigma}.$$

Příklad.

$$A'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} A^{\nu}$$

$$\frac{\partial A'^{\mu}}{\partial x'^{\rho}} = \frac{\partial}{\partial x'^{\rho}} (\Lambda^{\mu}_{\nu} A^{\nu}) = \Lambda^{\mu}_{\nu} \frac{\partial A^{\nu}}{\partial x^{\sigma}} \underbrace{\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\rho}}}_{\Lambda_{\rho}^{\sigma}}$$

Shrnutí.

$$x^{\mu} = (ct, x, y, z)$$

$$\eta_{\mu\nu}, \eta^{\alpha\beta} : \eta_{\mu\nu} A^{\mu} B^{\nu} = A_{\nu} B^{\nu} = A^{\mu} B_{\mu} = \dots$$

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}, \quad \text{LT}$$

Kapitola 4

Relativistická mechanika

4.1 Čtyř-rychlost

Tří-rychlost:

$$v^i \equiv \frac{dx^i}{dt}$$

Hledáme analogii ve 4D: jelikož čas dt není invariant, neboť $dt' = \gamma(dt - \frac{v}{c^2}dx)$, užijeme analogický vztah s vlastním časem:

$$u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad \boxed{u'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta u^\beta}. \quad (4.1)$$

K definici vlastního času:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Existuje právě jeden inerciální systém tak, že

$$dx = dy = dz = 0 \Rightarrow ds^2 = -c^2 dt^2 \equiv -c^2 d\tau^2,$$

kde τ je vlastní čas. Vlastní čas je invariant.

Prostorčasová „velikost“ u^μ :

$$\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = \frac{ds^2}{d\tau^2} = -c^2 = u^\sigma u_\sigma$$

Vztah k 3-rychlosti:

$$u^\mu = \frac{dt}{d\tau} \frac{dx^\mu}{dt} = \frac{dt}{d\tau} (c, \vec{v}) = \gamma(c, \vec{v}),$$

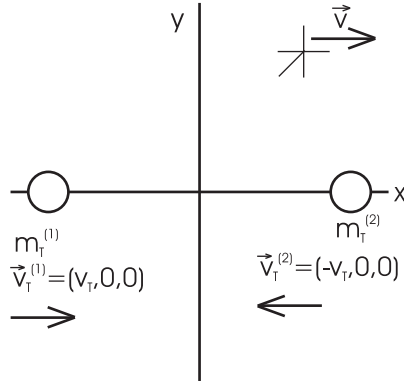
kde

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{dt}{\sqrt{-\frac{ds^2}{c^2}}} = \frac{c}{\sqrt{-\eta_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt}}} = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma.$$

4.2 Relativistické srážky, závislost hmotnosti na relativní rychlosti, klidová hmotnost

Máme soustavu dvou těles (značíme indexy ⁽¹⁾, resp. ⁽²⁾) v uspořádání dle obr. 4.1. Hmotnosti a rychlosti těles vzhledem k těžišti této soustavy (značíme indexem T) jsou

$$m_T^{(1)}, v_T^{(1)} = (v_T, 0, 0) \quad \text{a} \quad m_T^{(2)}, v_T^{(2)} = (-v_T, 0, 0).$$



Obrázek 4.1: Relativistická srážka

Nechť obě tělesa mají stejnou hmotnost:

$$m_T^{(1)} = m_T^{(2)} = m_T.$$

Zachování hmotnosti: Hmotnost před srážkou se rovná hmotnosti při srážce:

$$\underbrace{m_T^{(1)} + m_T^{(2)}}_{2m_T} = \underbrace{M_T}_{M_0}.$$

Zachování hybnosti: Hybnost před srážkou se rovná hybnosti při srážce:

$$m_T^{(1)} \vec{v}_T^{(1)} + m_T^{(2)} \vec{v}_T^{(2)} = M_T \vec{V}_T = 0,$$

$$m_T \underbrace{\left(\vec{v}_T^{(1)} + \vec{v}_T^{(2)} \right)}_0 = 0.$$

Nyní přejdeme do souřadné soustavy pohybující se vzhledem k těžiškové soustavě rychlostí v ve směru kladné části osy x . Rychlosti (jejich x -ové složky) je třeba transformovat dle vztahu

$$v_{II}^x = \frac{v_I^x - v}{1 - \frac{v_I^x v}{c^2}},$$

z něhož dostáváme

$$v^{(1)x} = \frac{v_T - v}{1 - \frac{v_T v}{c^2}},$$

$$v^{(2)x} = \frac{-v_T - v}{1 + \frac{v_T v}{c^2}}.$$

Zachování hmotnosti:

$$m^{(1)} + m^{(2)} = M.$$

Zachování hybnosti:

$$m^{(1)} \vec{v}^{(1)} + m^{(2)} \vec{v}^{(2)} = M \vec{V},$$

$$m^{(1)} v^{(1)x} + m^{(2)} v^{(2)x} = M V^x,$$

$$m^{(1)} \left(\frac{v_T - v}{1 - \frac{v_T v}{c^2}} + v \right) = m^{(2)} \left(\frac{v_T + v}{1 + \frac{v_T v}{c^2}} - v \right),$$

kde

$$\frac{v_T - v}{1 - \frac{v_T v}{c^2}} + v = \frac{v_T - v + v - \frac{v_T v^2}{c^2}}{1 - \frac{v_T v}{c^2}}$$

a

$$\frac{v_T + v}{1 + \frac{v_T v}{c^2}} - v = \frac{v_T + v - v - \frac{v_T v^2}{c^2}}{1 + \frac{v_T v}{c^2}}.$$

Jelikož

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

pak

$$\gamma^{(1,2)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left[\frac{v^{(1,2)}}{c}\right]^2}}.$$

Tedy

$$1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\pm v_T - v}{1 \mp \frac{v_T v}{c^2}} \right)^2 = \frac{1}{(1 \pm \frac{v_T v}{c^2})^2} \left[1 \mp \frac{2v_T v}{c^2} + \frac{v_T^2 v^2}{c^4} - \frac{v_T^2}{c^2} \pm \frac{2v_T v}{c^2} - \frac{v^2}{c^2} \right] = \frac{1}{(1 \pm \frac{v_T v}{c^2})^2} \left(1 - \frac{v_T^2}{c^2} \right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right).$$

Odtud

$$\gamma^{(1,2)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left[\frac{v^{(1,2)}}{c}\right]^2}} = \frac{1 \mp \frac{v_T v}{c^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{v_T^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}} = \gamma(v_T) \gamma(v) \left(1 \mp \frac{v_T v}{c^2} \right).$$

Tedy

$$\frac{m^{(1)}}{\gamma^{(1)}} = \frac{m^{(2)}}{\gamma^{(2)}} = m_0. \quad (4.2)$$

Další invariant (skalár): **klidová hmotnost** m_0 :

$$\boxed{\frac{m}{\gamma} = m_0} \quad (4.3)$$

4.3 Čtyř-hybnost

$$\boxed{p^\mu = m_0 u^\mu = m_0 \gamma(c, \vec{v}) = (m c, \vec{p})}, \quad (4.4)$$

kde

$$\vec{p} = m \vec{v} = m_0 \gamma \vec{v}.$$

Platí

$$\eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = -m_0^2 c^2.$$

4.4 Pohybová rovnice a čtyř-síla

Ve 3 rozměrech platí: (\vec{f} je 3-síla)

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{f}}. \quad (4.5)$$

Tady platí:

$$\frac{d\vec{p}}{d\tau} \underbrace{\frac{d\tau}{dt}}_{\frac{1}{\gamma}} = \vec{f} \rightarrow \frac{d\vec{p}}{d\tau} = \gamma \vec{f} \rightarrow \frac{dp^\mu}{d\tau} = F^\mu.$$

Tedy ve čtyřrozměrném prostoročasu máme **pohybovou rovnici** ve tvaru

$$\boxed{\frac{dp^\mu}{d\tau} = F^\mu}. \quad (4.6)$$

Čtyř-síla má tvar

$$\boxed{F^\mu = \left(c \frac{dm}{d\tau}, \gamma \vec{f} \right)}. \quad (4.7)$$

4.4.1 Porovnání s newtonovskou pohybovou rovnicí

KLASICKÁ FYZIKA:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}.$$

RELATIVITA:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a} + \vec{v} \frac{dm}{dt},$$

kde

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dt} &= \frac{dm_0}{dt} \gamma + m_0 \frac{d\gamma}{dt}, \\ \frac{d\gamma}{dt} &= \gamma^3 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2}. \end{aligned}$$

Jelikož

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{c^2}}} \rightarrow \frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{2} \frac{2 \frac{\vec{v}}{c^2} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}}{\left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{c^2}\right)^3}.$$

Průměty do \perp na \vec{v} a do \parallel na \vec{v} :

$$\vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a} + \frac{dm}{dt} \vec{v} \quad \left\{ \begin{array}{l} \parallel \text{ na } \vec{v}: \quad \vec{f}_{\parallel} = m\vec{a}_{\parallel} + \frac{dm}{dt} \vec{v} = m_{\parallel} \vec{a}_{\parallel} \\ \perp \text{ na } \vec{v}: \quad \vec{f}_{\perp} = m\vec{a}_{\perp} = m_{\perp} \vec{a}_{\perp} \Rightarrow m_{\perp} = m \end{array} \right.$$

Nechť \vec{v}_0 je jednotkový vektor ve směru rychlosti.

Potom

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\vec{v}_0)}{dt} = \underbrace{\frac{dv}{dt}\vec{v}_0}_{\vec{a}_{\parallel}} + v \underbrace{\frac{d\vec{v}_0}{dt}}_{\vec{a}_{\perp}},$$

$$m_{\parallel}\vec{a}_{\parallel} = m\vec{a}_{\parallel} + \frac{dm}{dv} \underbrace{\frac{dv}{dt}\vec{v}_0}_{\vec{a}_{\parallel}} v.$$

Nechť m_0 je konstantní. Potom

$$m_{\parallel} = m + \frac{dm}{dv} v = m + m_0 \underbrace{\frac{d\gamma}{dv}}_{\gamma^3 \frac{v}{c^2}} v = m \left(1 + \gamma^2 \frac{v^2}{c^2} \right) = m\gamma^2.$$

4.5 Einsteinův vztah ekvivalence hmotnosti a energie

Urychlování částice, $m_0 = \text{konst.}$ (síla nedeformuje ani neohřívá těleso):

$$dT = \underbrace{\vec{f}_{\parallel}}_{m\gamma^2\vec{a}_{\parallel} = m\gamma^2 \frac{dv}{dt} \vec{v}_0} \cdot \vec{v} dt = m\gamma^2 v dv = m_0 c^2 d\gamma = d(mc^2) \quad / \int,$$

neboť

$$d\gamma = \gamma^3 \left(\frac{v dv}{c^2} \right).$$

Po integraci:

$$\int_{\vec{v}_{IN}}^{\vec{v}_{FIN}} dT = \int_{\vec{v}_{IN}}^{\vec{v}_{FIN}} d(mc^2).$$

Tedy

$$T_{FIN} - T_{IN} = m_{v_{FIN}} c^2 - m_{v_{IN}} c^2.$$

Odkud

$$T = \int_{\vec{v}_{IN}}^{\vec{v}_{FIN}} dT = \underbrace{m_{v_{FIN}} c^2}_{T_{FIN}=T} - \underbrace{m_{v_{IN}} c^2}_{T_{IN}=0},$$

$$\boxed{T = mc^2 - m_0 c^2}. \quad (4.8)$$

Tedy celková energie se vypočte jako

$$mc^2 = m_0 c^2 + T,$$

neboli

$$E = E_0 + T = m_0 c^2 + mc^2 - m_0 c^2 = mc^2,$$

$$\boxed{E = mc^2}. \quad (4.9)$$

4.6 Vztah energie a hybnosti

Mějme transformační vztahy

$$\begin{aligned}\eta_{\mu\nu}p^\mu p^\nu &= -m_0^2 c^2, \\ \eta_{\mu\nu}p^\mu p^\nu &= -m^2 c^2 + p^2,\end{aligned}$$

kde

$$p^\mu = (mc, \vec{p}).$$

Tedy

$$\underbrace{m^2 c^2}_{\frac{E^2}{c^2}} = m_0^2 c^2 + p^2.$$

Tedy vztah mezi energií a hybností je

$$\boxed{E = c\sqrt{m_0^2 c^2 + p^2}}. \quad (4.10)$$

- $p^2 \ll m_0^2 c^2$:

$$E = m_0 c^2 \sqrt{1 + \frac{p^2}{m_0^2 c^2}} \doteq m_0 c^2 + \frac{p^2}{2m_0}$$

- $v = c \Leftrightarrow m_0 = 0$:

$$E = pc, \quad p = mv \quad \text{a zároveň} \quad E = mc^2$$

Definujeme **celkovou, efektivní, relativistickou hmotnost** jako

$$\boxed{m \equiv \frac{E}{c^2} = \frac{p}{c}}. \quad (4.11)$$

4.7 Otázka (ne)konstantnosti klidové hmotnosti

Mějme těžišťový systém jako na obrázku 4.1.

Platí zákon zachování hmotnosti (před srážkou a při srážce):

$$m_T^{(1)} + m_T^{(2)} = M_T \equiv M_0,$$

kde $m = m_0 \gamma$, tedy ($\gamma_T > 1$):

$$m_T^{(1)} + m_T^{(2)} = m_0 \gamma_T + m_0 \gamma_T = 2m_0 \gamma_T.$$

Zachovává se celková hmotnost, klidová se nemění!

$$\eta_{\mu\nu} F^\mu u^\nu = \eta_{\mu\nu} \frac{dp^\mu}{d\tau} u^\nu = \underbrace{\eta_{\mu\nu} \frac{dm_0}{d\tau} u^\mu u^\nu}_{-c^2 \frac{dm_0}{d\tau}} + \underbrace{\eta_{\mu\nu} m_0 \frac{du^\mu}{d\tau} u^\nu}_{a^\mu}_{=0, \text{ proč?}}$$

Proto

$$\eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -c^2 \quad / \quad \frac{d}{d\tau}.$$

Tedy

$$\eta_{\mu\nu} \frac{du^\mu}{d\tau} u^\nu + \eta_{\mu\nu} u^\mu \frac{du^\nu}{d\tau} = 0.$$

Shrnutí:

Nechť

$$\begin{aligned} \frac{E}{E_0} &= \gamma = \frac{m_0 c^2 + W}{m_0 c^2}, \\ \Delta E &= c^2 \Delta m, \\ \Delta E_0 &= c^2 \Delta m_0. \end{aligned}$$

Pohybové rovnice:

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = F^\mu, \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{f}.$$

Jednorozměrný případ:

Nechť $f(t)$ je konstantní:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = ?$$

$$\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = ft \rightarrow \frac{m_0^2 v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = f^2 t^2 \Rightarrow$$

Odtud

$$v = c \frac{ft}{\sqrt{m_0^2 c^2 + f^2 t^2}}.$$

Tedy

$$\boxed{v = c \frac{\frac{ft}{m_0 c}}{\sqrt{1 + \left(\frac{ft}{m_0 c}\right)^2}}.} \quad (4.12)$$

Odtud

$$\boxed{x = \frac{m_0 c^2}{f} \sqrt{1 + \left(\frac{ft}{m_0 c}\right)^2}.} \quad (4.13)$$

Poznámka ke vztahu (4.12):

- ft malé: $ft \ll m_0 c \Rightarrow$

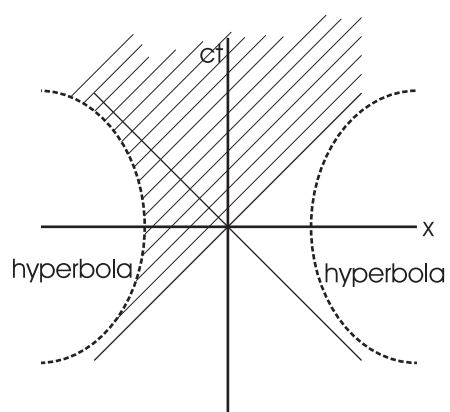
$$v = \frac{f}{m_0} t$$

- ft velké: $ft \gg m_0 c \Rightarrow$

$$v \rightarrow c$$

Mějme dvě částice, pro něž platí (4.12) a (4.13). Nechť $f \neq f(t)$. Pak se obě částice pohybují po větvích hyperboly.

Obě částice jsou od sebe odděleny (každá na jiné větvi hyperboly), nedají si o sobě zprávu!



Obrázek 4.2: Hyperbolický pohyb

Kapitola 5

Relativistická elektrodynamika ve vakuu

5.1 Klasická elektrodynamika ve třírozměrném prostoru

5.1.1 Klasická formulace Maxwellových rovnic

Ve třírozměrném prostoru mají Maxwellovy rovnice tvar

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, & \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{D} &= \rho, & \operatorname{div} \vec{B} &= 0. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Veličiny \vec{B} a \vec{E} máme nadefinovány jako

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}, \quad \vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \tag{5.2}$$

kde \vec{A} je vektorový potenciál a φ je skalární potenciál.

5.1.2 Lorenzova podmínka a rovnice kontinuity v třírozměrném prostoru

Lorenzova kalibrační podmínka má ve 3D tvar

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{A} = 0. \tag{5.3}$$

Dosadíme-li Lorenzovu kalibrační podmínku a definiční vztahy do druhé Maxwellovy rovnice, dostaneme z rovnice

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

rovnici

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{5.4}$$

těmito úpravami:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}, \quad \vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{A} = 0 :$$

$$\text{LS} = \operatorname{div} \left(-\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \operatorname{div} (-\operatorname{grad} \varphi) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\underbrace{\operatorname{div} \vec{A}}_{\operatorname{div} \vec{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}} \right) = -\nabla^2 \varphi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

$$\text{PS} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \text{vztah (5.4)}$$

Dosadíme-li Lorenzovu kalibrační podmínku a definiční vztahy do první Maxwellovy rovnice, dostaneme z rovnice

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

rovnici

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{j} \quad (5.5)$$

těmito úpravami:

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}, \quad \vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{A} = 0 :$$

$$\text{LS} = (\vec{A} \cdot \nabla) \nabla - (\nabla \cdot \nabla) \vec{A} + \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - A(\nabla \cdot \nabla) = 2\nabla(\operatorname{div} \vec{A}) - 2\nabla^2 \vec{A}$$

$$\text{PS} = \mu \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \mu \vec{j} - \frac{1}{c^2} \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

nyní máme vztah

$$2\nabla(\underbrace{\operatorname{div} \vec{A}}_{-\frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}}) - \nabla^2 \vec{A} - \underbrace{\nabla^2 \vec{A}}_{\nabla \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}} = \mu \vec{j} - \frac{1}{c^2} \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

který upravíme:

$$2\nabla\left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) - \nabla^2 \vec{A} + \nabla \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \mu \vec{j} - \frac{1}{c^2} \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

$$-\frac{1}{c^2} \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \nabla^2 \vec{A} = \mu \vec{j} - \frac{1}{c^2} \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \text{odkud již plyne vztah (5.5)}$$

Rovnice kontinuity má ve třírozměrném prostoru tvar

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0. \quad (5.6)$$

5.2 Čtyřrozměrný zápis elektrodynamiky

5.2.1 Čtyř-potenciál a Lorenzova podmínka, čtyř-proud a rovnice kontinuity

Hledáme analogie s třírozměrným prostorem.

Čtyř-potenciál má tvar

$$A^\mu \equiv \left(\frac{\varphi}{c}, \vec{A} \right). \quad (5.7)$$

Hustota náboje má tvar

$$j^\mu \equiv \left(c\rho, \vec{j} \right). \quad (5.8)$$

Dále definujeme **d'Alembertův symbol** jako

$$\square \equiv \eta^{\mu\nu} \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} \quad \left(= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 \right). \quad (5.9)$$

Lorenzova kalibrační podmínka ve čtyřrozměrném prostoročasu má tvar

$$\boxed{A^{\mu}_{,\mu} = 0}. \quad (5.10)$$

Rovnice (5.4) a (5.5) (tj. upravenou **první dvojici Maxwellových rovnic**) můžeme přepsat

$$\boxed{\square A^{\nu} = -\mu j^{\nu}}, \quad (5.11)$$

kde μ je permeabilita prostředí (tedy není to sčítací index!!!).

Rovnici kontinuity ve čtyřrozměrném prostoročasu prepíšeme jako

$$\boxed{j^{\mu}_{,\mu} = 0}. \quad (5.12)$$

Jak vypadá čtyř-hustota proudu? Jak již bylo napsáno, tak platí

$$j^{\mu} \equiv (c\rho, \vec{j}),$$

kde prostorupodobná část má tvar

$$\vec{j} = \rho \vec{v}.$$

Relativistická hustota náboje ρ má však tvar (Q je invariant)

$$\rho = \frac{dQ}{dV} = \frac{dQ}{\frac{dV_0}{\gamma}} = \gamma \underbrace{\frac{dQ}{dV_0}}_{=\rho_0} = \gamma \rho_0.$$

Hustotu proudu tedy můžeme přepsat jako

$$j^{\mu} = \frac{\rho}{\gamma} \gamma (c, \vec{v}) = \rho_0 u^{\mu}.$$

5.2.2 Vlnová rovnice

Vlnová rovnice má tvar

$$\boxed{\square A^{\mu} = -\mu j^{\mu}}. \quad (5.13)$$

5.2.3 Vyjádření pole pomocí čtyř-potenciálu, tenzor EM pole

V třírozměrném prostoru je vektor magnetické indukce definován jako

$$\vec{B}: B^i = \epsilon^{ijk} A_{k,j}.$$

Obecně platí

$$B^i = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} B_{jk},$$

kde $B_{jk} = A_{k,j} - A_{j,k}$ je antisymetrický tenzor, a také platí

$$B_{jk} = \epsilon_{ijk} B^i.$$

Ve čtyřech rozměrech platí analogie: definujeme antisymetrický tenzor $F_{\mu\nu}$:

$$B_{jk} \rightarrow \boxed{F_{\mu\nu} \equiv A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}} \quad (5.14)$$

Jak tento tenzor $F_{\mu\nu}$ vypadá?

- Prostor-prostorové složky:

$$F_{jk} \equiv B_{jk}$$

- Stejně indexy (antisymetrický!!!):

$$F_{ii} \equiv 0$$

- Časo-prostorové složky:

$$F_{0j} = A_{j,0} - A_{0,j} = \frac{1}{c} \frac{\partial A_j}{\partial t} - \overbrace{\frac{\partial A_0}{\partial x^j}}^{-\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial x^j}} = -\frac{E_j}{c}$$

- prostorový index můžu psát nahoru i dolů
- časový index: $\uparrow, \downarrow \dots$ změna znaménka

Tenzor elektromagnetického pole $F_{\mu\nu}$ má tedy tvar

$$F_{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & -\frac{E^1}{c} & -\frac{E^2}{c} & -\frac{E^3}{c} \\ +\frac{E^1}{c} & 0 & +B^3 & -B^2 \\ +\frac{E^2}{c} & -B^3 & 0 & +B^1 \\ +\frac{E^3}{c} & +B^2 & -B^1 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -\frac{E_j}{c} \\ +\frac{E_i}{c} & \epsilon_{ijk} B^k \end{array} \right). \quad (5.15)$$

Dvakrát kontravariantní tvar tenzoru elektromagnetického pole získáme pomocí vztahu

$$F^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\mu} \eta^{\beta\nu} F_{\mu\nu}. \quad (5.16)$$

Tenzor $F^{\alpha\beta}$ má tvar

$$F^{\alpha\beta} = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & +\frac{E^1}{c} & +\frac{E^2}{c} & +\frac{E^3}{c} \\ -\frac{E^1}{c} & 0 & +B^3 & -B^2 \\ -\frac{E^2}{c} & -B^3 & 0 & +B^1 \\ -\frac{E^3}{c} & +B^2 & -B^1 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & +\frac{E^j}{c} \\ -\frac{E^i}{c} & \epsilon^{ijk} B_k \end{array} \right). \quad (5.17)$$

5.2.4 Maxwellovy rovnice

První série Maxwellových rovnic

$$F^{\mu\nu}_{,\nu} = (A^{\nu, \mu} - A^{\mu, \nu})_{,\nu} = \underbrace{A^{\nu, \mu}}_{A^{\nu, \mu}=0} - A^{\mu, \nu}_{,\nu} = -\square A^{\mu} = \mu j^{\mu}$$

První série Maxwellových rovnic lze napsat jako

$$\boxed{F^{\mu\nu}_{,\nu} = \mu j^{\mu}}, \quad (5.18)$$

kde μ u j^{μ} je permeabilita!

Nechť

$$F_{\mu\nu} \equiv A_{\nu, \mu} - A_{\mu, \nu}.$$

Jak získáme rovnici

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad ?$$

Nechť $\underline{\mu = 0}$:

$$F^{0j}_{,j} = \frac{1}{c} E^j_{,j} \stackrel{c^2 = \frac{1}{\mu\epsilon}}{=} \mu c \rho.$$

Jak získáme rovnici

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad ?$$

Nechť $\underline{\mu = i}$:

$$F^{i0}_{,0} + F^{ij}_{,j} = \underbrace{\frac{-1}{c^2} \frac{\partial E^i}{\partial t}}_{-\epsilon \mu} + \underbrace{\epsilon^{ijk} B_{k,j}}_{(\operatorname{rot} \vec{B})^i} = \mu j^i.$$

Rovnici kontinuity lze pak zapsat jako

$$j^{\mu}_{,\mu} = \frac{1}{\mu} F^{\mu\nu}_{,\nu\mu} = 0$$

díky antisymetrii $F^{\mu\nu}$ a záměnnosti parciálních derivací. ($F^{\mu\nu}_{,\nu\mu} \stackrel{\mu \leftrightarrow \nu}{=} F^{\nu\mu}_{,\mu\nu} = -F^{\mu\nu}_{,\nu\mu} \Rightarrow = 0$)

Druhá série Maxwellových rovnic

Definujme $F_{[\mu\nu, \kappa]}$ cykl. takto:

$$\boxed{F_{[\mu\nu, \kappa]} \text{ cykl.} \equiv F_{\mu\nu, \kappa} + F_{\kappa\mu, \nu} + F_{\nu\kappa, \mu}}. \quad (5.19)$$

Tedy

$$F_{[\mu\nu, \kappa]} \text{ cykl.} \equiv F_{\mu\nu, \kappa} + F_{\kappa\mu, \nu} + F_{\nu\kappa, \mu} = A_{\nu, \mu\kappa} - A_{\mu, \nu\kappa} + A_{\mu, \kappa\nu} - A_{\kappa, \mu\nu} + A_{\kappa, \nu\mu} - A_{\nu, \kappa\mu} = 0.$$

Proč?

$\mu \leftrightarrow \nu$:

$$\begin{array}{lll} +F_{\nu\mu,\kappa} & +F_{\kappa\nu,\mu} & +F_{\mu\kappa,\nu} \\ -F_{\mu\nu,\kappa} & -F_{\kappa\mu,\nu} & -F_{\nu\kappa,\mu} \end{array}$$

 $\mu \leftrightarrow \kappa$:

$$\begin{array}{lll} +F_{\kappa\nu,\mu} & +F_{\mu\kappa,\nu} & +F_{\nu\mu,\kappa} \\ -F_{\mu\nu,\kappa} & -F_{\kappa\mu,\nu} & -F_{\nu\kappa,\mu} \end{array}$$

Jak získáme rovnici

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad ?$$

Nechť $F_{[0i,j]\text{cykl.}}$:

$$\begin{aligned} F_{[0i,j]\text{cykl.}} &= F_{0i,j} + F_{j0,i} + F_{ij,0} \\ &= -\frac{1}{c}E_{i,j} + \frac{1}{c}E_{j,i} + \frac{1}{c}\epsilon_{ijk}\frac{\partial B^k}{\partial t} = 0 \quad / \cdot \epsilon^{ijl} \\ \epsilon^{ijl}(E_{j,i} - E_{i,j}) + \epsilon^{ijl}\epsilon_{ijk}\frac{\partial B^k}{\partial t} &= 0 \\ (\text{rot } \vec{E})^l + (\text{rot } \vec{E})^l + 2\delta_k^l\frac{\partial B^k}{\partial t} &= 0, \text{ kde platí} \\ \underbrace{\epsilon^{jil}}_{(\epsilon^{ijl}) \cdot (-1)} (-E_{j,i}) &= (\text{rot } \vec{E})^l \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Jak získáme rovnici

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad ?$$

Nechť $F_{[12,3]\text{cykl.}}$:

$$\begin{aligned} F_{[12,3]\text{cykl.}} &= F_{12,3} + F_{31,2} + F_{23,1} \\ &= \epsilon_{123}B^3 + \epsilon_{312}B^2 + \epsilon_{231}B^1 = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{div } \vec{B} = 0$$

5.2.5 Relativita elektromagnetického pole

Tenzor elektromagnetického pole transformujeme dle následujícího vztahu:

$$\boxed{F'_{\mu\nu} = \Lambda_{\mu}^{\alpha} \Lambda_{\nu}^{\beta} F_{\alpha\beta}} \quad (5.20)$$

Invarianty elektromagnetického pole (bez přítomnosti zdrojů)

$$A^{\mu}_{,\mu} = 0 \quad (\text{Lorenzova kalibrační podmínka})$$

$$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 2F^{0j}F_{0j} + F^{ij}F_{ij} = -2\frac{E^j E_j}{c^2} + \underbrace{\epsilon^{ijk} B_k \epsilon_{ijl} B^l}_{=2\delta^k_l B_k} = 2\left(B^2 - \frac{E^2}{c^2}\right)$$

Definujeme

$$*F^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma},$$

přičemž $-\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ = znaménko permutace $\mu\nu\rho\sigma$.

$${}^*F^{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -B^j \\ \hline B^i & \frac{1}{c}\epsilon^{ijkl}E_l \end{array} \right) \quad \left\{ \begin{array}{l} {}^*F^{0j} = \frac{1}{2}\epsilon^{0jkl}F_{kl} = \frac{1}{2}(-\epsilon^{jkl})\epsilon_{klm}B^m = -\delta_m^j B^m = -B^j \\ {}^*F^{ij} = \frac{1}{2}(\epsilon^{ij0l}F_{0l} + \epsilon^{ijl0}F_{l0}) = \epsilon^{ij0l}F_{0l} = (-\epsilon^{ijl})\left(-\frac{1}{c}E_l\right) = \frac{1}{c}\epsilon^{ijl}E_l \end{array} \right.$$

Nyní již můžeme rozepsat další invariant:

$${}^*F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = 2{}^*F^{0j}F_{0j} + {}^*F^{ij}F_{ij} = \frac{2}{c}B^jE_j + \frac{1}{c}\epsilon^{ijl}E_l\epsilon_{ijk}B^k = \frac{2}{c}B^jE_j + \frac{1}{c}2\delta_k^l E_l B^k = \frac{4}{c}\vec{E} \cdot \vec{B}.$$

Dále je invariantní klidová hustota náboje ρ_0 . Je to důsledek zachování celkového náboje, které je ekvivalentní platnosti Maxwellových rovnic. Jinak řečeno Maxwellovy rovnice vyžadují, aby náboj ani nevznikal ani nezánikal, a to nezávisle na pozorovateli.

Kalibrační volnost A^μ

Elektromagnetického pole se nijak nezmění, pokud od čtyř-potenciálu (v kovariantním tvaru) A_μ přejdeme ke čtyř-potenciálu $A_\mu + \chi_{,\mu}$, kde $\chi_{,\mu}$ je gradient skalární funkce, která splňuje rovnici $\square\chi = 0$. Potom totiž

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu} + \underbrace{\chi_{,\nu\mu} - \chi_{,\mu\nu}}_{=0}$$

díky záměnnosti parciálních derivací.

5.2.6 Lorentzova čtyř-síla

Lorentzova tří-síla má tvar

$$\vec{f} = \vec{f}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}).$$

Čtyř-síla má tvar

$$F^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} = \left(c \frac{dm}{d\tau}, \gamma \vec{f} \right).$$

Lorentzovu čtyř-sílu definujeme jako

$$\boxed{F_L^\mu = qF^{\mu\nu}u_\nu}. \quad (5.21)$$

Nechť je $\mu = i$:

$$F^{i0}u_0 + F^{ij}u_j = \frac{1}{c}E^i\gamma c + \epsilon^{ijk}B_k\gamma v_j = \gamma(E^i + (\vec{v} \times \vec{B})^i).$$

Jaký je fyzikální rozměr časové složky čtyř-síly?

$$F_L^0 = qF^{0j}u_j = q\frac{\gamma}{c}E^jv_j = \frac{\gamma}{c}q\vec{E} \cdot \vec{v} = \frac{\gamma}{c} \cdot (\text{výkon}) \quad !!!,$$

kde

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{d\tau} \frac{d\tau}{dt}.$$

Také platí:

$$\begin{aligned}\eta_{\mu\nu}F^{\mu}u^{\nu} &= -c^2\frac{dm_0}{d\tau} \\ &= F^{\mu}u_{\mu} \rightarrow F_L^{\mu}u_{\mu} = q \underbrace{F^{\mu\nu}}_{\text{antisymetrický}} \underbrace{u_{\nu}u_{\mu}}_{\text{symetrický}} = 0,\end{aligned}$$

protože obecně pro symetrický tenzor $S_{\mu\nu}$ a antisymetrický tenzor $A^{\mu\nu}$ vždy platí

$$A^{\mu\nu}S_{\mu\nu} \stackrel{\text{přeznačení}}{=} A^{\nu\mu}S_{\nu\mu} \stackrel{\text{přehození}}{=} -A^{\mu\nu}S_{\mu\nu} = 0.$$

Pro Lorentzovu sílu to znamená, že v elektromagnetickém poli se nemění klidová hmotnost částic.

5.2.7 Hustota čtyř-síly

$$\boxed{F^{\mu} \rightarrow \Phi^{\mu} \equiv \frac{dF^{\mu}}{dV_0}}, \quad (5.22)$$

kde V_0 je vlastní objem, $V_0 = \gamma V$.

Tedy

$$\Phi^{\mu} = \frac{dF^{\mu}}{dV_0} \Rightarrow \Phi^i = \frac{d(\gamma f^i)}{\gamma dV} = \frac{df^i}{dV} \equiv \Phi_3^i,$$

kde Φ^{μ} je čtyřrozměrná hustota síly a Φ_3^i je třírozměrná hustota síly.

$$\Phi^{\mu} = \frac{dF^{\mu}}{dV_0} \Rightarrow \Phi_L^{\mu} = \frac{\overbrace{dF_L^{\mu}}^{qF^{\mu\nu}u_{\nu}}}{dV_0} = \underbrace{\frac{dq}{dV_0}}_{\rho_0} F^{\mu\nu}u_{\nu} = F^{\mu\nu}j_{\nu}$$

5.2.8 Rovinná harmonická EM vlna, vlnový čtyř-vektor

Mějme vlnovou rovnici pro elektromagnetické pole ve vakuu (tj. nejsou zdroje)

$$\square A^{\mu} = -\mu j^{\mu} = 0$$

a Lorenzovu kalibrační podmínku

$$A^{\sigma}_{,\sigma} = 0,$$

dále nechť

$$A^{\mu} = \text{Re}(\hat{A}^{\mu}e^{ik_{\sigma}x^{\sigma}}).$$

Tedy platí

$$\nabla_{\beta}A^{\mu} = \underbrace{\hat{A}^{\mu}e^{ik_{\sigma}x^{\sigma}}}_{=A^{\mu}} i k_{\rho} \underbrace{\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x^{\beta}}}_{\delta_{\beta}^{\rho}} = ik_{\beta}A^{\mu}.$$

Dosadíme předchozí vztah do vlnové rovnice:

$$\square A^{\mu} = \eta^{\alpha\beta}\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}A^{\mu} = i^2 \underbrace{\eta^{\alpha\beta}k_{\alpha}k_{\beta}}_{=0} A^{\mu} = 0.$$

Tedy

$$\boxed{\eta^{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta = 0} \quad \dots \text{světelný vektor} \quad (5.23)$$

$$A^\sigma{}_{,\sigma} = i \underbrace{k_\sigma A^\sigma}_{=0} = 0$$

Tedy

$$\boxed{k_\sigma A^\sigma = 0} \quad \dots \text{příčné vlnění} \quad (5.24)$$

Také

$$\vec{A} = \hat{A} \exp i \underbrace{(-\omega t + \vec{k} \cdot \vec{r})}_{\substack{k_\sigma x^\sigma \\ (ct, \vec{r})}} = \eta_{\rho\sigma} k^\rho k^\sigma$$

Vlnový čtyř-vektor má tvar

$$\boxed{k^\mu = \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k} \right)} \quad \dots \text{světelný vektor} \quad (5.25)$$

Tedy

$$|\vec{k}| = k^0 = \frac{\omega}{c}$$

Také

$$|\vec{k}| \equiv k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\nu}{c}$$

Shrnutí:

- $k^\mu = \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k} \right)$
- vlnový čtyř-vektor je nulový
- je to světelný vektor
- elektromagnetická vlna se šíří rychlostí světla
- elektromagnetické vlnění je příčné

5.2.9 Tenzor energie a hybnosti elektromagnetického pole

$$T_{EM}^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu} \left(F^{\mu\sigma} F_\sigma^\nu - \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} \underbrace{F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma}}_{2(B^2 - \frac{E^2}{c^2})} \right)$$

Ze „čtyřrozměrné divergence“ tenzoru dostaneme

$$\begin{aligned}
T_{EM,\nu}^{\mu\nu} &= \frac{1}{\mu} \left(F^{\mu\sigma}{}_{,\nu} F_{\sigma}^{\nu} + F^{\mu\sigma} \underbrace{F_{\sigma,\nu}^{\nu}}_{-\mu j_{\sigma}} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} F^{\rho\sigma}{}_{,\nu} F_{\rho\sigma} \right) \\
&= \frac{1}{\mu} \left(F^{\mu\sigma,\nu} F_{\nu\sigma} - \frac{1}{2} F^{\rho\sigma,\mu} F_{\rho\sigma} \right) - \underbrace{F^{\mu\sigma} j_{\sigma}}_{\Phi_L^{\mu}} \\
&\stackrel{\nu \rightarrow \rho}{=} \frac{1}{\mu} F_{\rho\sigma} \left(F^{\mu\sigma,\rho} - \frac{1}{2} F^{\rho\sigma,\mu} \right) - \Phi_L^{\mu} \\
&= \frac{1}{2\mu} F_{\rho\sigma} \underbrace{\left(F^{\mu\sigma,\rho} + F^{\rho\mu,\sigma} + F^{\sigma\rho,\mu} \right)}_{F^{[\mu\sigma,\rho]}_{\text{cykl.}}=0} - \Phi_L^{\mu} \\
&= -\Phi_L^{\mu},
\end{aligned}$$

kde jsme z výrazu $F^{\mu\sigma,\rho}$ vzali jen jeho antisymetrickou část $\frac{1}{2} (F^{\mu\sigma,\rho} - F^{\mu\rho,\sigma})$.

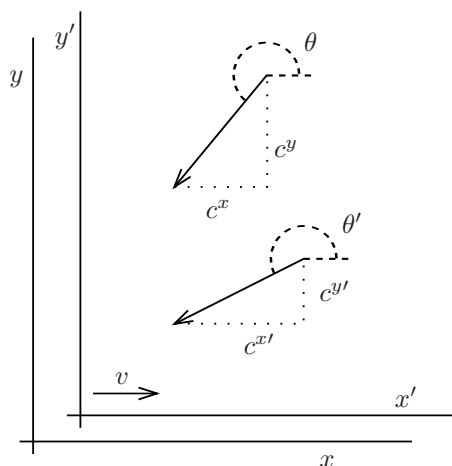
$$\begin{aligned}
T_{EM}^{00} &= \frac{1}{\mu} \left(\underbrace{F^{0j} F_j^0}_{E^2/c^2} + \frac{1}{2} \left(B^2 - \frac{E^2}{c^2} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B} \right) = w \text{ (hustota energie pole)} \\
T_{EM}^{0j} &= \frac{1}{\mu} F^{0k} F_k^j = \frac{1}{\mu} \frac{E^k}{c} \epsilon_{kl}^j B^l = \frac{1}{c} \left(\vec{E} \times \vec{H} \right)^j = \frac{1}{c} S^j \text{ (hustota toku energie pole)}
\end{aligned}$$

Kapitola 6

Vzhled objektů ve speciální relativitě

6.1 Směr – aberace

Aberace: déšť prší kolmo k zemi, jedu na koloběžce rychlostí \vec{v} a v systému koloběžky prší šikmo. Analogie s fotony.



Obrázek 6.1: Aberace

Uspořádání je na obr. 6.1, kde c^x , c^y , resp. c'^x , c'^y jsou průměty c do os x , y , resp. x' , y' .

S využitím transformace rychlosti dle vztahů (2.26) lze rozepsat

$$\cos \theta' = \frac{c'^x}{c} = \frac{1}{c} \frac{c^x - v}{1 - \frac{v}{c^2} c^x} = \frac{\cos \theta - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta} \quad \text{a podobně} \quad \sin \theta' = \frac{c'^y}{c} = \frac{1}{c} \frac{c^y}{\gamma \left(1 - \frac{v}{c^2} c^x\right)} = \frac{\sin \theta}{\gamma \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)}.$$

Tedy:

$$\boxed{\cos \theta' = \frac{\cos \theta - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta}, \quad \sin \theta' = \frac{\sin \theta}{\gamma \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)}} \quad (6.1)$$

Poznámka: Tyto vztahy lze odvodit také pomocí transformace vlnového čtyř-vektoru (6.2), a to jako $\cos \theta' = \frac{k'^x}{k'}$, $\sin \theta' = \frac{k'^y}{k'}$.

6.2 Barva – Dopplerův jev

Při stejném uspořádání (dle obr. 6.1) lze obecně vlnový čtyř-vektor v nečárkované a v čárkované soustavě zapsat jako

$$k^\mu = \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k} \right) = \frac{\omega}{c} (1, \cos \theta, \sin \theta, 0),$$

$$k'^\mu = \left(\frac{\omega'}{c}, \vec{k}' \right) = \frac{\omega'}{c} (1, \cos \theta', \sin \theta', 0),$$

přičemž vlnový čtyř-vektor se do čárkované soustavy transformuje dle vztahu

$$k'^\mu = \Lambda^\mu_\nu k^\nu, \quad (6.2)$$

kde matice transformace má tvar

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\frac{v}{c}\gamma & 0 & 0 \\ -\frac{v}{c}\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Potom

$$\frac{\omega'}{c} = k'^0 = \Lambda^0_0 \underbrace{\frac{\omega}{c}}_{k^0} + \Lambda^0_1 \underbrace{\frac{\omega}{c} \cos \theta}_{k^1} + \underbrace{\Lambda^0_2}_{=0} k^2 + \underbrace{\Lambda^0_3}_{=0} k^3 = \gamma \frac{\omega}{c} - \frac{v}{c} \gamma \frac{\omega}{c} \cos \theta = \gamma \frac{\omega}{c} \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta \right).$$

$$\omega' = \omega \gamma \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta \right)$$

(6.3)

6.2.1 Podélný Dopplerův jev

Platí

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{v}{c}\right) \left(1 + \frac{v}{c}\right)}}.$$

Vzdalující se zdroj: $\theta = 0$

Pokud $\theta = 0$, světelný paprsek přichází k pozorovateli ve směru osy x (na obrázku letí zleva doprava), takže se zdroj od čárkovaného systému vzdaluje (paprsek „dohání“ pozorovatele).

$$\omega' = \omega \gamma \left(1 - \frac{v}{c} \right) = \omega \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} \leq \omega \quad (6.4)$$

Přibližující se zdroj: $\theta = \pi$

Pokud $\theta = \pi$, světelný paprsek přichází k pozorovateli proti směru osy x (na obrázku letí zprava doleva), takže se zdroj k čárkovanému systému přibližuje (paprsek „letí naproti“ pozorovateli).

$$\omega' = \omega \gamma \left(1 + \frac{v}{c}\right) = \omega \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} \geq \omega \quad (6.5)$$

Poznámka: V obou případech jdou hodiny zdroje vůči hodinám v čárkovaném systému pomaleji. Klasický efekt je ale silnější, a proto je i přes dilataci času při přibližování zdroje frekvence měřená v čárkovaném systému vyšší než frekvence měřená zdrojem.

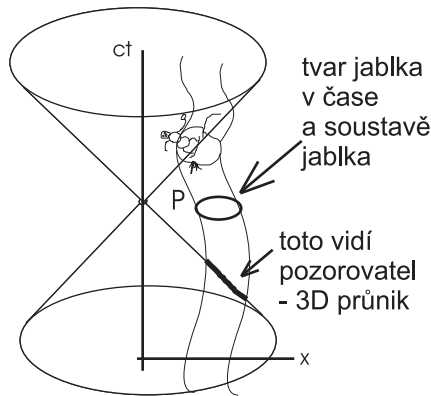
6.2.2 Příčný Dopplerův jev

Pokud zdroj vyšle záření ve směru kolmém na směr pohybu čárkovaného systému, odpovídá to pro vztah (6.3) úhlu $\theta = \frac{\pi}{2}$ (paprsek letí zespoda nahoru). V čárkovaném systému pak bude naměřena frekvence

$$\omega' = \gamma \omega \geq \omega. \quad (6.6)$$

Příčný Dopplerův jev je čistě relativistický jev.

6.3 Tvar – deformace



Obrázek 6.2: Vzhled jablka

Příklad. (Viz obr. 6.2) Mějme prostoročasový diagram. V něm máme znázorněnou polohu stojícího jablka v čase. V čase t se pozorovatel P , který je umístěn v počátku prostoru (tj. na časové ose), podívá na jablko. Co uvidí? Uvidí jablko jako třírozměrný řez jablka světelným kuželem.

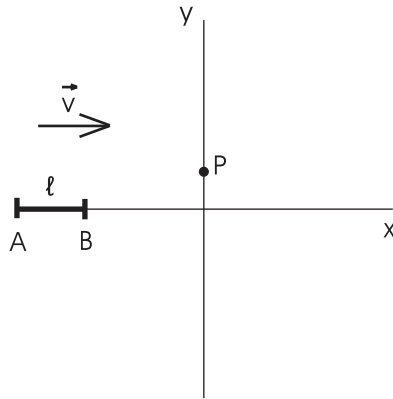
Příklad. Mějme uspořádání dle obr. 6.3. Ve směru osy x letí tyč rychlostí \vec{v} . V klidu má tyč délku l_0 . Pozorovatel P stojí na ose y a určuje délku tyče tak, že v čase t_P zaznamená současně paprsek vyslaný v čase t_A z levého konce tyče a paprsek vyslaný v čase t_B z pravého konce tyče. V čase t_A měl levý konec tyče polohu $x_A(t_A)$ a v čase t_B měl pravý konec tyče polohu $x_B(t_B)$. Délka tyče l_P naměřená pozorovatelem P je pak rozdíl těchto poloh.

Nechť $t = 0$ tehdy, když je tyč symetricky vůči počátku. Potom lze psát

$$\begin{aligned} x_A(t) &= vt - \frac{l}{2} \Rightarrow vt_A = x_A(t_A) + \frac{l}{2}, \\ x_B(t) &= vt + \frac{l}{2} \Rightarrow vt_B = x_B(t_B) - \frac{l}{2}. \end{aligned}$$

Vzdálenost bodu $x_A(t_A)$ od pozorovatele je

$$c(t_P - t_A) = \sqrt{[x_A(t_A)]^2 + y_P^2}.$$



Obrázek 6.3: Letící tyč

Vzdálenost bodu $x_B(t_B)$ od pozorovatele je

$$c(t_P - t_B) = \sqrt{[x_B(t_B)]^2 + y_P^2}$$

Pro zjednodušení zanedbáme y_P .

$$\begin{aligned} c(t_P - t_A) &\doteq \mp x_A(t_A) & / \cdot \frac{v}{c} \\ c(t_P - t_B) &\doteq \mp x_B(t_B) & / \cdot \frac{v}{c} \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned} vt_P - vt_A &= \mp \frac{v}{c} x_A(t_A) \\ vt_P - vt_B &= \mp \frac{v}{c} x_B(t_B) \end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned} x_A(t_A) &= \frac{vt_P - \frac{l}{2}}{1 \mp \frac{v}{c}} \\ x_B(t_B) &= \frac{vt_P + \frac{l}{2}}{1 \mp \frac{v}{c}} \end{aligned}$$

Naměřená délka tyče l_P potom bude

$$l_P = x_B(t_B) - x_A(t_A).$$

Mějme tři situace:

1. Oba konce tyče jsou nalevo od počátku \Rightarrow horní znaménko.

$$l_P = \frac{vt_P + \frac{l}{2} - vt_P + \frac{l}{2}}{1 - \frac{v}{c}} = \frac{l}{1 - \frac{v}{c}} = \frac{l_0}{\gamma(1 - \frac{v}{c})} = l_0 \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} \geq l_0 \geq l \quad (!!!)$$

Navzdory relativistické kontrakci vidíme delší tyč!

2. Tyč vpravo od počátku:

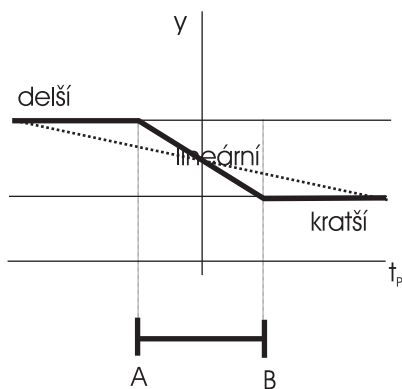
$$l_P = \frac{l}{1 + \frac{v}{c}} = l_0 \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} \leq l \leq l_0$$

3. Levý konec tyče je vlevo od počátku, pravý konec je vpravo od počátku:

$$l_P = \frac{(vt_P + \frac{l}{2})(1 - \frac{v}{c}) - (vt_P - \frac{l}{2})(1 + \frac{v}{c})}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{l - 2t_P \frac{v^2}{c}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Existuje taková poloha tyče, kdy $l_P = l$? Taková situace nastává pro $t_P = \frac{l}{2c}$, kdy je tyč umístěna symetricky vůči počátku (paprsky z obou konců uletí vzdálenost poloviny délky zkrácené tyče).

Výsledky vlevo a vpravo nezávisí na t_P (limitní situace!) - viz obr. 6.4.



Obrázek 6.4: Vzhled tyče vzhledem k t_P

Kapitola 7

Variační principy ve speciální teorii relativity

7.1 Virtuální posunutí

V klasické mechanice je virtuální posunutí isochronní, v relativitě nikoli:

$$\delta x^i(1,2) = 0$$

7.2 D'Alembertův princip a Lagrangeovy rovnice 1. druhu

„Nalezení lagrangiánu Λ “:

Přepis z 3D:

$$\int_1^2 \left(F_\mu - \frac{dp_\mu}{d\tau} \right) \delta x^\mu d\tau = 0$$

A upravujeme:

$$\int_1^2 \left(F_\mu \delta x^\mu d\tau - \underbrace{\frac{dp_\mu}{d\tau} \delta x^\mu d\tau}_{\text{per partes}} \right) = \dots$$

per partes s pevnými konci:

$$\int_1^2 -\frac{dp_\mu}{d\tau} \delta x^\mu d\tau = \underbrace{[-p_\mu \delta x^\mu]_1^2}_{=0 \text{ (díky pevným koncům)}} - \int_1^2 -p_\mu \frac{d\delta x^\mu}{d\tau} d\tau, \quad +p_\mu \frac{d\delta x^\mu}{d\tau} d\tau = \underbrace{p_\mu}_{=m_0 u_\mu} d\delta x^\mu = -m_0 c^2 \delta d\tau$$

dosadíme:

$$\dots = \int_1^2 (F_\mu \delta x^\mu d\tau - m_0 c^2 \delta d\tau) = 0 \quad (7.1)$$

Pokud lze (7.1) přepsat jako $\delta \int_1^2 \text{vnitřek} d\tau = 0$, pak je *vnitřek* úměrný Λ .

V takovém případě lze psát

$$\delta S = \delta \int_1^2 \Lambda d\tau = \int_1^2 (\delta \Lambda d\tau + \Lambda \delta d\tau) = 0, \quad (7.2)$$

což je **Hamiltonův princip**, kde $S = \int_1^2 \Lambda d\tau$ je akce.

7.3 Lagrangeova funkce a akce

V klasické mechanice:

$$S = \int_{T-V} \underbrace{L}_{T-V}(t, q^j, \dot{q}^j = \frac{d}{dt} q^j) dt$$

Potom

$$\delta S = \dots \int_{\text{stav 1}}^{\text{stav 2}} \left[\frac{\partial L}{\partial q^j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \right) \right] \delta q^j dt = 0$$

Lagrangian v relativitě: Λ

- závisí na podobných proměnných, konkrétně na x^μ a u^μ
- je invariantní
- integruje se dle vlastního času τ
- při newtonovské limitě L přechází v něco, co známe z klasické fyziky

7.4 Hamiltonův princip a Lagrangeovy rovnice 2. druhu

7.4.1 Variace polohy: $x^{*\mu}$

$$x^{*\mu} = x^\mu + \delta x^\mu \quad \longrightarrow \quad dx^{*\mu} = dx^\mu + d\delta x^\mu$$

7.4.2 Variace změny času: $d\tau^*$

Známe vztah pro časoprostorový interval:

$$(-ds^2) = c^2 d\tau^2 = -\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Tedy

$$\begin{aligned}
 d\tau^* &= \frac{1}{c} \sqrt{-\eta_{\mu\nu} dx^{*\mu} dx^{*\nu}} \\
 &\doteq \frac{1}{c} \sqrt{c^2 d\tau^2 - 2\eta_{\mu\nu} dx^\mu d\delta x^\nu} \\
 &\doteq d\tau \sqrt{1 - \frac{2}{c^2} \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{d\delta x^\nu}{d\tau}} \\
 &\doteq d\tau - \frac{1}{c^2} \eta_{\mu\nu} \underbrace{\frac{dx^\mu}{d\tau}}_{u^\mu} d\delta x^\nu \\
 &\doteq d\tau - \underbrace{\frac{1}{c^2} u_\nu d\delta x^\nu}_{\delta d\tau}
 \end{aligned}$$

Shrnutí:

$$dx^{*\mu} = dx^\mu + d\delta x^\mu \quad (7.3)$$

$$d\tau^* = d\tau + \delta d\tau, \quad \delta d\tau = -\frac{1}{c^2} u_\nu d\delta x^\nu \quad (7.4)$$

Poznámka: $d\delta = \delta d$.

7.4.3 Variace čtyř-rychlosti: $u^{*\mu}$

$$\begin{aligned}
 u^{*\mu} &\equiv \frac{dx^{*\mu}}{d\tau^*} = \frac{dx^\mu + d\delta x^\mu}{\underbrace{d\tau}_{u^\mu + \frac{d\delta x^\mu}{d\tau}}} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{c^2} u_\nu \frac{d\delta x^\nu}{d\tau}\right)} \\
 &\doteq \left(u^\mu + \frac{d\delta x^\mu}{d\tau}\right) \left(1 + \frac{1}{c^2} u_\nu \frac{d\delta x^\nu}{d\tau}\right) \\
 &\doteq u^\mu + \underbrace{\frac{d\delta x^\mu}{d\tau} + \frac{1}{c^2} u^\mu u_\nu \frac{d\delta x^\nu}{d\tau}}_{=\delta u^\mu} \\
 &\doteq u^\mu + \underbrace{\left(\delta^\mu_\nu + \frac{1}{c^2} u^\mu u_\nu\right)}_{\delta u^\mu} \frac{d\delta x^\nu}{d\tau}
 \end{aligned}$$

projektor do 3D, je kolmý na u^ν

$$u^{*\mu} = u^\mu + \delta u^\mu, \quad \delta u^\mu = \left(\delta^\mu_\nu + \frac{1}{c^2} u^\mu u_\nu\right) \frac{d\delta x^\nu}{d\tau} \quad (7.5)$$

Důkaz vzájemné kolmosti projektoru a u^ν :

$$\left(\delta^\mu_\nu + \frac{1}{c^2} u^\mu u_\nu\right) u^\nu = u^\mu + \frac{1}{c^2} u^\mu (-c^2) = 0,$$

neboť

$$\eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = u_\nu u^\nu = -c^2.$$

Tedy

$$\underbrace{\eta_{\mu\nu}u^{*\mu}u^{*\nu}}_{\substack{u^\mu \delta u^\nu + u^\nu \delta u^\mu \\ \text{zanedbat}}} = -c^2 + \underbrace{o(\delta^2)}_{\text{zanedbat}}.$$

Odtud plyne, že $u^{*\mu}$ je správně normalizovaná, tj. že platí

$$\boxed{\eta_{\mu\nu}u^{*\mu}u^{*\nu} = -c^2.} \quad (7.6)$$

Poznámka o projektorech

Platí pravidlo:

„Projektor na druhou rovná se projektor.“

Tedy

$$\begin{aligned} P^2 &= (\delta^\mu_\sigma + \frac{1}{c^2}u^\mu u_\sigma) (\delta^\sigma_\alpha + \frac{1}{c^2}u^\sigma u_\alpha) \\ &= \delta^\mu_\alpha + \frac{2}{c^2}u^\mu u_\alpha + \frac{1}{c^4}u^\mu u_\alpha (-c^2) \\ &= \delta^\mu_\alpha + \frac{1}{c^2}u^\mu u_\alpha \\ &= P \end{aligned}$$

Tedy vztah

$$\left(\delta^\mu_\nu + \frac{1}{c^2}u^\mu u_\nu \right)$$

by měl být projektor.

7.4.4 Cesta k Lagrangeovým rovnicím 2. druhu ve speciální relativitě

Dosažením předchozích výsledků výpočtu variací δx^μ , δu^μ a $\delta d\tau$ do (7.2) získáme

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_1^2 \left[\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x^\mu} \delta x^\mu + \frac{\partial \Lambda}{\partial u^\mu} \delta u^\mu \right) d\tau + \Lambda \delta d\tau \right] \\ &= \int_1^2 \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial x^\mu} \delta x^\mu d\tau + \frac{\partial \Lambda}{\partial u^\mu} \left(\delta^\mu_\nu + \frac{1}{c^2}u^\mu u_\nu \right) \frac{d\delta x^\nu}{d\tau} d\tau - \frac{\Lambda}{c^2} u_\nu \frac{d\delta x^\nu}{d\tau} d\tau \right] \\ &\stackrel{\text{per partes}}{=} \int_1^2 \left\{ \frac{\partial \Lambda}{\partial x^\mu} \delta x^\mu - \frac{d}{d\tau} \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial u^\mu} \left(\delta^\mu_\nu + \frac{1}{c^2}u^\mu u_\nu \right) - \frac{\Lambda}{c^2} u_\nu \right] \delta x^\nu \right\} d\tau \\ &\stackrel{\mu \rightarrow \nu}{=} \int_1^2 \left\{ \frac{\partial \Lambda}{\partial x^\nu} - \frac{d}{d\tau} \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial u^\nu} + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial u^\mu} u^\mu - \Lambda \right) u_\nu \right] \right\} \delta x^\nu d\tau = 0. \end{aligned}$$

Lagrangeovy rovnice 2. druhu ve speciální relativitě mají tvar

$$\boxed{\frac{\partial \Lambda}{\partial x^\nu} - \frac{d}{d\tau} \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial u^\nu} + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial u^\mu} u^\mu - \Lambda \right) u_\nu \right] = 0,} \quad (7.7)$$

kde výraz $H = \frac{\partial \Lambda}{\partial u^\mu} u^\mu - \Lambda$ je hamiltonián.

7.5 Lagrangeova funkce a pohybové rovnice v konkrétních případech

7.5.1 Nabitá částice v EM poli

Lorentzova síla:

$$F_\mu = qF_{\mu\nu}u^\nu,$$

kde

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}.$$

Tedy:

$$\int_1^2 F_\mu \delta x^\mu d\tau = \int_1^2 q (A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}) u^\nu \delta x^\mu d\tau =$$

dosadíme:

$$\begin{aligned} A_{\nu,\mu} \delta x^\mu &= \delta A_\nu \\ A_{\mu,\nu} u^\nu &= \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} = \frac{dA_\mu}{d\tau} \end{aligned}$$

a získáme:

$$\begin{aligned} &= q \int_1^2 \left(\delta A_\nu u^\nu - \frac{dA_\mu}{d\tau} \delta x^\mu \right) d\tau = \\ &\stackrel{\text{per partes}}{=} q \int_1^2 \left(\delta A_\nu u^\nu + A_\mu \frac{d\delta x^\mu}{d\tau} \right) d\tau = \\ &= q \int_1^2 \left(\delta A_\nu u^\nu d\tau + A_\mu \underbrace{\frac{d\delta x^\mu}{d\tau}}_{=\delta dx^\mu = \delta(u^\mu d\tau)} \right) = \\ &q \int_1^2 \delta(A_\nu u^\nu d\tau) \Rightarrow \end{aligned}$$

dosazením do (7.1) \Rightarrow

$$\int_1^2 (F_\mu \delta x^\mu d\tau - m_0 c^2 \delta d\tau) = \delta \int_1^2 (q A_\nu u^\nu - m_0 c^2) d\tau = \delta \int_1^2 \Lambda d\tau$$

Kontrola výsledků dosazením $\Lambda = q A_\sigma u^\sigma - m_0 c^2$ do Lagrangeových rovnic 2. druhu:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x^\nu} = q A_{\sigma,\nu} u^\sigma, \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial u^\nu} = q A_\sigma \underbrace{\frac{\partial u^\sigma}{\partial u^\nu}}_{\delta^\sigma_\nu} = q A_\nu \quad \Rightarrow \quad H = \frac{\partial \Lambda}{\partial u^\mu} u^\mu - \Lambda = q A_\mu u^\mu + m_0 c^2 - q A_\sigma u^\sigma = m_0 c^2$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x^\nu} - \frac{d}{d\tau} \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial u^\nu} + \frac{1}{c^2} H u_\nu \right] = q A_{\sigma,\nu} u^\sigma - \frac{d}{d\tau} \left[q A_\nu + \underbrace{m_0 u_\nu}_{p_\nu} \right] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dp_\nu}{d\tau} = q A_{\sigma,\nu} u^\sigma - q A_{\nu,\sigma} u^\sigma = q \underbrace{(A_{\sigma,\nu} - A_{\nu,\sigma})}_{F_{\nu\sigma}} u^\sigma = F_\nu$$

7.5.2 Variační odvození 1. sady Maxwellových rovnic

Pro elektromagnetické pole má hustota lagrangiánu λ tvar

$$\lambda = \underbrace{-\frac{1}{4\mu} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}}_{\text{kinetický člen}} + \underbrace{j^\mu A_\mu}_{\text{potenciálový člen}} .$$

Akci S určíme integrací hustoty lagrangiánu přes nějakou pevnou uzavřenou prostoročasovou oblast Ω :

$$S = \int_{\Omega} \lambda d\Omega .$$

Nechť všude na hranici $\partial\Omega$ oblasti Ω platí okrajová podmínka $\delta A_\mu = 0$, tj. máme „pevné konce“.

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= \delta \int_{\Omega} \lambda d\Omega = \int_{\Omega} \delta \lambda d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \left(\underbrace{-\frac{1}{4\mu} \delta F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{4\mu} F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} + j^\mu \delta A_\mu}_{-\frac{1}{2\mu} F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu}} \right) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \left[-\frac{1}{2\mu} F^{\mu\nu} (\delta A_{\nu,\mu} - \delta A_{\mu,\nu}) + j^\mu \delta A_\mu \right] d\Omega = \dots \\ & \quad -F^{\mu\nu} \delta A_{\mu,\nu} + F^{\mu\nu} \delta A_{\nu,\mu} = -F^{\mu\nu} \delta A_{\mu,\nu} + \underbrace{F^{\nu\mu}}_{=-F^{\mu\nu}} \delta A_{\mu,\nu} = -2F^{\mu\nu} \delta A_{\mu,\nu} \\ \dots &= \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\mu} F^{\mu\nu} \delta A_{\mu,\nu} + j^\mu \delta A_\mu \right) d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} \left[\frac{1}{\mu} (F^{\mu\nu} \delta A_\mu)_{,\nu} - \frac{1}{\mu} F^{\mu\nu}{}_{,\nu} \delta A_\mu + j^\mu \delta A_\mu \right] d\Omega = \\ \stackrel{\text{Gaussova věta}}{=} & \underbrace{\int_{\partial\Omega} \frac{1}{\mu} F^{\mu\nu} \delta A_\mu d\Sigma_\nu}_{=0} + \int_{\Omega} \left(-\frac{1}{\mu} F^{\mu\nu}{}_{,\nu} + j^\mu \right) \delta A_\mu d\Omega = 0 \quad \forall \delta A_\mu \\ &\Rightarrow F^{\mu\nu}{}_{,\nu} = \mu j^\mu \end{aligned}$$

Literatura

- [1] VOTRUBA, V. *Základy speciální teorie relativity*. 1. vyd. Praha: Academia, 1969. 440 s. Kapitola IV., s. 135–136.
- [2] VOTRUBA, V. *Základy speciální teorie relativity*. 1. vyd. Praha: Academia, 1969. 440 s. Kapitola IV., s. 145–147.
- [3] VOTRUBA, V. *Základy speciální teorie relativity*. 1. vyd. Praha: Academia, 1969. 440 s. Kapitola IV., s. 137–138.