Matematická analýza II

LS 2002 / 2003

Jaroslava Schovancová

5. června 2003

Obsah

Kapitola 1

Newtonův integrál

POJMY V TÉTO KAPITOLE: Zobecněná primitivní funkce (ZPF), zobecněný přírůstek funkce, Newtonův integrál (NI), velké „Ó“, řádová rovnost. Věta o jednoznačnosti ZPF, per partes pro NI, linearita NI, intervalová aditivita, substituce pro NI, o existenci primitivní funkce, o konvergenci NI, srovnávací věta pro NI.

DEFINICE 1.1 (ZOBECNĚNÁ PRIMITIVNÍ FUNKCE.) Funkce $F(X)$ se nazve ZOBECNĚNÁ PRIMITIVNÍ FUNKCE k $f(x)$ v intervalu $(a; b)$, pokud

1. $F(x)$ je spojitá v $(a; b)$,
2. existuje KONEČNÁ MNOŽINA $N \subset (a; b)$ tak, že
$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a; b) \setminus N$$

ÚMLUVA ZNAČENÍ 1.1 Značení **zobecněné primitivní funkce:**
$$F(x) \in \mathrm{ZPF}\,(f(x); (a; b))\,.$$

POZNÁMKA 1.1

1. Primitivní funkce je zobecněná primitivní funkce.
2. co se děje v N:
   - $F'(x)$ neexistuje
   - $F'(x) \neq f(x)$
   - $f(x)$ není definována

PŘÍKLAD 1.1

1. $|x| \in \mathrm{ZPF}\,(\mathrm{sgn}\ (x); \mathbb{R})$
   - $|x|$ spojitá v $\mathbb{R}$
   - $(|x|)' = \mathrm{sgn}\ (x)\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
2. $F(x) := \begin{cases} x(\ln|x| - 1) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$
   - TVRDÍM: $F(x) \in \mathrm{ZPF}\,(\ln|x|; \mathbb{R})$
   - DŮKAZ TVRDÍM: spojitost: $x \neq 0$ spojitá
   - ??? $F(0) = 0 = \lim_{x\to 0} x(\ln|x| - 1) = 0$, protože $x \to 0$ a $(\ln|x| - 1) \to -\infty$

VĚTA 1.1 (O JEDNOZNAČNOSTI ZPF.) Nechť $F(x), G(x) \in \text{ZPF}\,(f(x); (a;b))$. Pak existuje $C \in \mathbb{R}$ tak, že $(F(x) - G(x)) = C$ v $(a;b)$.

DŮKAZ VĚTY 1.1 $F(x), G(x) \in \text{ZPF}$ spojitá v $(a;b)$
$F'(x) = f(x) \forall x \in (a;b) \diagdown N_1$
$G'(x) = f(x) \forall x \in (a;b) \diagdown N_2$
Položme $N = N_1 \cup N_2$ konečná množina; $N = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, BÚNO $x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n$.
Označíme $x_0 = a$, $x_{n+1} = b$. Označme$H(x) = F(x) - G(x)$ v intervalu $(x_i; x_{i+1})$ $(0 \le i \le n)$: $H'(x) = [F(x) - G(x)]' = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Pak $\exists C_i \in \mathbb{R}$; $H(x) = C_i$ v $(x_i; x_{x+1})$
$H(x)$ je spojitá v x_i (rozdíl dvou ZPF, které jsou spojité)
$H(x_i) = \lim_{x \to x_{i+}} H(x) = C_i = \lim_{x \to x_{i-} H(x) = C_{i-1}}$ ($H(x) = C_i$ na $\mathcal{P}_+(x_i)$)
$\Rightarrow C_i = C_{i-1} \Rightarrow \exists C \in \mathbb{R}$, $C_i = C$ $\forall i$

$\square$

ÚMLUVA ZNAČENÍ 1.2 Značení **limity zprava (zleva):**

$$F(x_0+) := \lim_{x \to x_0+} F(x)$$
$$F(x_0-) := \lim_{x \to x_0-} F(x)$$

PŘÍKLAD 1.2 $\lim_{x \to +\infty} f(x) = f(+\infty-)$

DEFINICE 1.2 (ZOBECNĚNÝ PŘÍRŮSTEK.)

$$[F(x)]_a^b = [F(x)]_{x=a}^{x=b} := F(b-) - F(a+)$$

DEFINICE 1.3 (NEWTONŮV INTEGRÁL.) Je-li $F(x) \in \text{ZPF}\,(f(x); (a;b))$, definujeme

$$(\mathcal{N}) \int_a^b f(x) \mathrm{d}x = [F(x)]_a^b \,,$$

má-li pravá strana smysl.

ÚMLUVA ZNAČENÍ 1.3 $(\mathcal{N})$ nepíšeme, ale myslíme si ho.

POZNÁMKA 1.2 **Korektnost definice:** $F(x), G(x) \in \text{ZPF}\,(f(x); (a;b))$. Co potřebuji?

- $\exists$ ZPF
- $\exists$ $F(a+), F(b-)$ (to je OK), pak dle věty 1.1 $F(x) = G(x) + C$
- $F(a+) - F(b-)$ má smysl

$F(a+) = G(a+) + C$
$F(b-) = G(b-) + C$
$F(b-) - F(a+) = (G(b-) + C) - (G(a+) + C) =$ (věta o aritmetice limit) $= G(b-) - G(a+)$

POZNÁMKA 1.3 Pokud $F(x)$ spojitá v $[a;b] \Rightarrow [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

PŘÍKLAD 1.3
1. $(\mathcal{N}) \int_{-1}^{1} \ln|x| \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \ln|x| \mathrm{d}x = [x(\ln|x| - 1)]_{-1}^{1} = -1 - (+1) = -2$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = [\operatorname{arctg}(x)]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$
3. $\int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = [\ln|x+1|]_0^{+\infty} = +\infty - 0 = +\infty$
4. $\int_{-\infty}^{+\infty} (x + x^3) \mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}\right]_{-\infty}^{+\infty} = +\infty - (+\infty) \ldots$ nemá smysl.

VĚTA 1.2 (<u>PER PARTES PRO NEWTONŮV INTEGRÁL.</u>) Nechť $F(x) \in \mathrm{ZPF}\,(F'(x); (a;b))$, $G(x) \in \mathrm{ZPF}\,(G'(x); (a;b))$. Potom

$$\int_a^b F'(x)G(x)\mathrm{d}x = [F(x)G(x)]_a^b - \int_a^b F(x)G'(x)\mathrm{d}x,$$

má-li pravá strana smysl.

ÚMLUVA ZNAČENÍ 1.4 $(a;b)\setminus N \ldots$ až na KM (konečnou množinu)

DŮKAZ VĚTY 1.2 $F(x) \in \mathrm{ZPF}\,(F'(x); (a;b)) \Rightarrow F(x)$ je spojitá na $(a;b)$ & $\exists F'(x)$ vlastní až na KM
$\exists H(x) \in \mathrm{ZPF}\,(F(x)G'(x); (a;b))$ a $[H(x)]_a^b$ má smysl
TVRDÍM: $F(x) \cdot G(x) - H(x) \in \mathrm{ZPF}\,(F(x)G'(x); (a;b))$
- spojitost v $(a;b)$ OK.
- přírůstek: $[F(x) \cdot G(x) - H(x)]_a^b = [F(x) \cdot G(x) -]_a^b - [H(x)]_a^b \ldots$ má to smysl, můžu roztrhnout limity
- $[F(x) \cdot G(x) - H(x)]_a^b \ldots$ z definice
- $[F(x) \cdot G(x) -]_a^b \ldots$ pravá strana
- $[H(x)]_a^b = \int_a^b F(x)G'(x)$
- derivace: $(F(x) \cdot G'(x) - H(x))' = F' \cdot G + F \cdot G' - H' =$ až na KM $= F' \cdot G$; $H' = F \cdot G'$

□

VĚTA 1.3 (<u>LINEARITA NEWTONOVA INTEGRÁLU.</u>)

$$\int_a^b c \cdot f(x)\mathrm{d}x = c \cdot \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b f(x) + g(x)\mathrm{d}x = c \cdot \int_a^b f(x) + g(x)\mathrm{d}x,$$

mají-li pravé strany smysl.

DŮKAZ VĚTY 1.3 Důkaz je za domácí cvičení.

□

VĚTA 1.4 (<u>INTERVALOVÁ ADITIVITA.</u>) Nechť $a < b < c$.

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x,$$

pokud integrály napravo jsou konečné.

DŮKAZ VĚTY 1.4 Dle předpokladů $\exists F_1(x) \in \text{ZPF}\,(f(x);(a;b))$ & $\exists F_2(x) \in \text{ZPF}\,(f(x);(a;b))$
Navíc $F_1(b-), F_2(b+)$ jsou konečné.

Definuji $F(x) := \begin{cases} F_1(x), x \in (a;b) \\ F_1(b-), x = b \\ F_2(x) + S, x \in (b;c), S = F_1(b-) - F_2(b+) \end{cases}$

TVRDÍM: $F(x) \in \text{ZPF}\,(F'(x);(a;b))$
SPOJITOST: na $(a;b)$ a na $(b;c)$ zřejmá.

- v bodě b: $F(b) = \begin{cases} F_1(b-) \\ F_2(b+) + S = F_1(b-) \end{cases} \Rightarrow F(x)$ je spojitá na $(a;c)$

$[F(x)]' = f(x)$ až na KM
$\text{LHS} = [F(x)]_a^c = F(c-) - F(a+) = F_2(c-) + S - F_1(a+) =$
$= F_2(c-) + F_1(b-) - F_2(b+) - F_1(a+) =$
$= [F_2(x)]_b^c + [F_1(x)]_a^b = \text{RHS}.$

□

VĚTA 1.5 (<u>SUBSTITUCE PRO NEWTONŮV INTEGRÁL.</u>) Nechť $\varphi(t) : (\alpha;\beta) \to (a;b)$ vzájemně jednoznačně, $\varphi(t)$ je spojitá, $\varphi'(t)$ konečná, nenulová existuje všude až na KM. Potom

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot |\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi^{-1}(a+)}^{\varphi^{-1}(b-)} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\mathrm{d}t,$$

má-li alespoň výraz vpravo smysl.

DŮKAZ VĚTY 1.5 OZNAČME:

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \ldots (1)$

$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot |\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t \ldots (2)$

$\int_{\varphi^{-1}(a+)}^{\varphi^{-1}(b-)} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\mathrm{d}t \ldots (3)$

$\varphi(t)$ buď roste, nebo klesá. Omezme se na $\varphi(t)$ <u>klesající</u>:
$(2) = (3)$: $\varphi(t)$ klesající: $\varphi^{-1}(b-) = \inf(\varphi^{-1}(a;b)) = \alpha$, $\varphi^{-1}(a+) = \sup(\varphi^{-1}(a;b)) = \beta$.
$\varphi'(t) \leq 0$ všude, kde existuje: všude až na KM. $|\varphi'(t)| = -\varphi'(t)$ všude až na KM.
$(2) = -\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\mathrm{d}t$
$(3) = \int_\beta^\alpha f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\mathrm{d}t = -\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\mathrm{d}t$
(1) : existuje: $\exists F(x) \in \text{ZPF}\,(f(x);(a;b))$, potom $F(\varphi(t)) \in \text{ZPF}\,(f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t);(\alpha;\beta))$
spojitost: $F(x)$ spojitá $=$ ZPF, $\varphi(t)$ spojitá dle předpokladů $\Rightarrow$ spojitá
$[F(\varphi(t))]' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$

$(2) = -\left[F\left(\varphi(t)\right)\right]_{\alpha}^{\beta} = \left(F\left(\varphi(\beta-)\right) - F\left(\varphi(\alpha+)\right)\right)$
$\varphi(\beta-) = a$, $F(a+)$ existuje, $\varphi(t) > a$, $t \in \mathcal{P}_{-}(\beta)$, $-\left(F(a+) - F(b-)\right) = (1)$
obráceně: (2) existuje:
$\int_{\alpha}^{\beta} f\left(\varphi(t)\right) \cdot |\varphi'(t)| =$ (položím $t = \varphi^{-1}(x)$, stejná úvaha jako když $(1) = (2)$):
$= \int_a^b f\left(\varphi\left(\varphi^{-1}(x)\right)\right) \cdot \left|\varphi'\left(\varphi^{-1}(x)\right)\right| \cdot \left|[\varphi^{-1}(x)]'\right| \mathrm{d}x =$
Věta o limitě složené funkce $= [\varphi^{-1}(x)] = \frac{1}{\varphi(\varphi^{-1}(x))} = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

□

Definice 1.4 Dodatek k definici Newtonova integrálu:

Je-li $b < a$, pak
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x := -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$$
a navíc
$$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x := 0.$$

Poznámka 1.4 Hodnota integrálu nezávisí na konečně mnoha změnách $f(x)$. $F'(x) = f(x)$.

Věta 1.6 (O existenci primitivní funkce.) Nechť $f(x)$ je spojitá v $(a; b)$. Potom existuje $F(x)$ primitivní k $f(x)$ v $(a; b)$.

Důkaz věty 1.6 Později.

□

Poznámka 1.5 Pokud $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \in \mathbb{R}$, říkáme, že integrál konverguje.

Poznámka 1.6 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ konverguje, $(c; d) \in (a; b)$, potom též $\int_c^d f(x)\mathrm{d}x$ konverguje.

Věta 1.7 (O konvergenci Newtonova integrálu.) Nechť $f(x)$ je spojitá v $(a; b)$. Potom

1. je-li $f(x) \geq 0$ v $(a; b)$ { resp. $f(x) \leq 0$ v $(a; b)$ }, pak $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ existuje.
2. existuje-li $g(x)$ tak, že $|f(x)| \leq g(x)$ všude v $(a; b)$ a navíc $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ konverguje, potom také $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ konverguje.

Důkaz věty 1.7 Dle Věty 1.6 $\exists F(x)$ primitivní funkce k $f(x)$

1. $F'(x) = f(x) \geq 0$ v $(a; b)$
   F je neklesající: $F(b-), F(a+)$ existují, navíc: $F(b-) - F(a+)$ má smysl, protože $F(b-) \geq F(a+)$, případ $(F(b-) \geq F(a+)) \neq \infty$ (domysled za DÚ)

2. $\exists G(x) \in \mathrm{ZPF}\left(g(x); (a; b)\right)$
   $G(b-), G(a+)$ existují vlastní
   ukažme např.: $\exists F(b-)$ vlastní:
   $F(x) = G(x) + F(x) - G(x)$, kde $H(x) = F(x) - G(x)$. Pak

$[H(x)]' = F'(x) - G'(x) = f(x) - g(x) \leq 0$ v $(a;b)$ až na KM,
tedy platí na $\mathcal{P}_-(b)$, $H(x)$ je nerostoucí na $\mathcal{P}_-(b)$.
$\Rightarrow H(b-)$ existuje. Závěr: $F(b-)$ existuje.
$H(b-)$ je vlastní: stačí zdola omezená: $[H(x) + 2G(x)]' = f(x) - g(x) + 2g(x) =$
$= f(x) + g(x) \geq 0$ na $\mathcal{P}_-(b)$
$H(x) + 2G(x)$ je neklesající:
$H(x)+2G(x) \geq H(x_0)+2G(x_0) = C$, $C \ldots$ konstanta, $\forall x \in (x_0;b)$, kde $x_0 \in \mathcal{P}_-(b)$
$H(x) \geq -2G(x) + C$
$G(b-)$ existuje vlastní
$\Rightarrow H(x)$ je zdola omezená.

□

POZNÁMKA 1.7 Funkce $g(x)$ z případu 2) se nazývá INTEGRABILNÍ MAJORANTA k funkci $f(x)$.

VĚTA 1.8 Nechť $f(x)$ je spojitá, omezená na omezeném uzavřeném intervalu $[a;b]$. Potom

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \text{ konverguje.}$$

DŮKAZ VĚTY 1.8 $|f(x)| \leq M = g(x)$, $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = M \cdot (b-a)$
Dle Věty 1.7 : případ 2)

□

POZNÁMKA 1.8 **Dodatek**:Předpoklady jsou splněny speciálně, je-li $f(x)$ spojitá v $[a;b]$.

DEFINICE 1.5 (<u>VELKÉ O.</u>) Nechť $f(x), g(x)$ jsou definovány na $\mathcal{P}(x_0)$. Říkáme, že $f(x) = O\left(g(x)\right)$ pro $x \to x_0$, pokud $\exists c > 0$ a $\exists \delta > 0$ tak, že $|f(x)| \leq c \cdot |g(x)|$ pro $x \in \mathcal{P}^\delta(x_0)$.

DEFINICE 1.6 (<u>ŘÁDOVÁ ROVNOST.</u>) Říkáme, že $f(x) \sim g(x)$ ($f(x)$ je řádově rovno $g(x)$) pro $x \to x_0$, pokud $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ existuje konečná, nenulová. Analogicky definujeme pro $x \to x_0+$, $x \to x_0-$.

PŘÍKLAD 1.4

1. $\sin x \sim x$ pro $x \to 0$
2. $\ln(1+x) \sim x$ pro $x \to 0$
3. $1 - \cos x \sim x^2$ pro $x \to 0$
4. $p(x) \ldots$ polynom stupně $n \Rightarrow p(x) \sim x^n$ pro $x \to +\infty$
   $\frac{p(x)}{x^n} = \frac{a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots}{x^n} = a_n + a_{n-1} \cdot x^{-1} + \ldots = a_n$
5. $\operatorname{arctg} x = O(1)$ pro $x \to 0+$
   $|\operatorname{arctg} x| \leq \frac{\pi}{2} \cdot 1 = C \cdot 1$ na $\mathbb{R}$

6. $\ln x = O(\frac{1}{\sqrt{x}})$ pro $x \to 0+$
   $\sqrt{x} \cdot \ln(x) \to 0$ pro $x \to 0+$
   $|\sqrt{x} \cdot \ln(x)| \leq 1$ v jistém $\mathcal{P}_+(0)$
   $|\ln(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$

LEMMA 1.1

1. Nechť $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A \in \mathbb{R}$. Pak $f(x) = O\left(g(x)\right)$ pro $x \to x_0$.
2. Nechť $f(x) \sim g(x)$ pro $x \to x_0$. Potom $f(x) = O\left(g(x)\right)$ a také $g(x) = O\left(f(x)\right)$ pro $x \to x_0$.

DŮKAZ LEMMATU 1.1

1. $\frac{f(x)}{g(x)} \to A \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \to |A| \Rightarrow$
   $\Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq |A| + 1$ na jistém $\mathcal{P}(x_0)$
   $|f(x)| \leq (|A| + 1) \cdot |g(x)|$ na jistém $\mathcal{P}(x_0)$.
2. $f(x) \sim g(x) \ldots \frac{f(x)}{g(x)} \to A \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow$
   $\Rightarrow$ dle 1) $f(x) = O\left(g(x)\right)$ pro $x \to x_0$
   $f(x) \sim g(x) \ldots \frac{g(x)}{f(x)} \to \frac{1}{A} \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow$
   $\Rightarrow$ dle 1) $g(x) = O\left(f(x)\right)$ pro $x \to x_0$

$\square$

POZNÁMKA 1.9 Je-li $f(x) = o\left(g(x)\right)$ (malé „ó“), je též $f(x) = O\left(g(x)\right)$ (velké „ó“) pro $x \to x_0$.

VĚTA 1.9 (<u>SROVNÁVACÍ VĚTA.</u>) Nechť $f(x), g(x)$ jsou spojité na jistém $\mathcal{P}_+(x_0)$, $g(x) > 0$.

1. Jestliže $f(x) = O\left(g(x)\right)$ pro $x \to x_0+$ a $\int_{x_0}^{x_0+\delta} g(x)\mathrm{d}x$ konverguje pro nějaké δ, potom též $\int_{x_0}^{x_0+\delta_1} f(x)\mathrm{d}x$ konverguje pro δ_1 dost malé.
2. Je-li $f(x) \sim g(x)$ pro $x \to x_0$, potom $\exists \delta_1 > 0$ tak, že $\forall \delta \in (0; \delta_1)$ platí

$$\int_{x_0}^{x_0+\delta} f(x) \text{ konverguje } \Leftrightarrow \int_{x_0}^{x_0+\delta} g(x) \text{ konverguje}$$

POZNÁMKA 1.10

DŮKAZ VĚTY 1.9

1. $f(x) = O\left(g(x)\right) \Rightarrow \exists \delta_1 \;\&\; \exists c > 0$: $|f(x)| \leq C \cdot |g(x)| = C \cdot g(x)$ na $\mathcal{P}_+^{\delta_1}(x_0)$
   BÚNO $\delta_1 < \delta \Rightarrow \int_{x_0}^{x_0+\delta} g(x)\mathrm{d}x$ konverguje.
   $C \cdot g(x)$ je konvergentní majoranta k $f(x)$ na $\mathcal{P}_+^{\delta_1}(x_0)$
   $\Rightarrow \int_{x_0}^{x_0+\delta_1} f(x)\mathrm{d}x$ konverguje.
2. $f(x) \sim g(x) \Rightarrow f(x) = O\left(g(x)\right) \;\&\; g(x) = O\left(f(x)\right)$ pro $x \to x_0$ dle 1).

$\square$

PŘÍKLAD 1.5

1. Konverguje $\int_0^1 \ln x \mathrm{d}x$?
   Zvolme $\delta \in (0;1)$. Potom:
   $\int_0^1 \ln x \mathrm{d}x = \int_0^\delta \ln x \mathrm{d}x + \int_\delta^1 \ln x \mathrm{d}x$
   $\int_\delta^1 \ln x \mathrm{d}x$ konverguje: spojitá funkce na omezeném uzavřeném intervalu.
   $\ln x = O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ pro $x \to 0$
   $\int_0^\delta \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = [2\sqrt{x}]_0^\delta = 2\sqrt{\delta} - 0 = 2\sqrt{\delta} \dots$ konverguje
   Výsledek: $\int_0^1 \ln x \mathrm{d}x$ konverguje.

PŘÍKLAD 1.6 Důležité příklady

1. $\int_0^\delta x^a \mathrm{d}x$ konverguje $\Leftrightarrow a > -1,\ \delta \in (0;\infty)$
2. $\int_\kappa^{+\infty} x^\alpha \mathrm{d}x$ konverguje $\Leftrightarrow \alpha < -1,\ \kappa \in (0;\infty)$

PŘÍKLAD 1.7 **Výpočet:** (např. 2:)
$\int_\kappa^{+\infty} x^\alpha \mathrm{d}x,\ \kappa \in (0;\infty)$

$$\text{primitivní funkce k } x^\alpha = \begin{cases} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \alpha \neq -1 \\ \\ \ln|x|, \alpha = -1 \end{cases}$$

$$\int_\kappa^{+\infty} x^\alpha \mathrm{d}x = \begin{cases} \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_\kappa^{+\infty} = \begin{cases} +\infty, \alpha > -1 \\ \in \mathbb{R}, \alpha < -1 \end{cases} \\ \\ [\ln|x|]_\kappa^{+\infty} = +\infty - \ln\kappa = +\infty \dots \text{ diverguje} \end{cases}$$

PŘÍKLAD 1.8 $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha} \mathrm{d}x = \int_0^\delta \dots \mathrm{d}x + \int_\delta^\kappa \dots \mathrm{d}x + \int_\kappa^{+\infty} \dots \mathrm{d}x = I_1 + I_2 + I_3,\ 0 < \delta < \kappa < +\infty$
I_2 konverguje vždy
$\frac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha} \sim x^{1-\alpha}$ pro $x \to 0+$
$I_1 \dots$ konverguje $\Leftrightarrow \alpha < 2$. Dále platí
u $+\infty$: $\frac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha} \sim x^{-\alpha},\ x \to +\infty$, takže
$I_3 \dots$ konverguje $\Leftrightarrow \alpha > +1$.
ZÁVĚR: konvergence pro $\alpha \in (1;2)$.

Kapitola 2

Riemannnův integrál

Pojmy v této kapitole: Dolní součet, horní součet, dolní integrál, horní integrál, Riemannův integrál (RI), spojitost na intervalu, obyčejná spojitost, stejnoměrná spojitost, objem rotačního tělesa, plocha v polárních souřadnicích, délka křivky. Věta o aditivitě dolního integrálu, o aditivitě horního integrálu, o aditivitě Riemannova integrálu.

Definice 2.1 (Dolní součet, horní součet. Dolní integrál, horní integrál.)
Nechť $f(x) : [a;b] \to \mathbb{R}$ je omezená. Nechť $D := \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}$,
$m_i := \inf f([x_{i-1}; x_i])$, $i = 1, \ldots, n$
a $M_i := \sup f([x_{i-1}; x_i])$, $i = 1, \ldots, n$. Pak definujeme

$s(D) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$ jako dolní součet $f(x)$ příslušející D a také definujeme

$S(D) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$ jako horní součet $f(x)$ příslušející D. Dále definujeme

$\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \sup_D s(D)$ jako dolní integrál. Analogicky definujeme

$\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \inf_D S(D)$ jako horní integrál.

Poznámka 2.1 $m \le f(x) \le M \Rightarrow m \le m_i \le M_i \le M$,
$m(b-a) \le s(D) \le S(D) \le M(b-a)$

Poznámka 2.2 Důsledek:

1. $\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$, $\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$ jsou vždy konečné.

2. Nechť D^* je zjemnění D. Potom:

$$s(D^*) \ge s(D) \text{ a } S(D^*) \le S(D)$$

Důsledek:
D_1, D_2 libovolná $\Rightarrow s(D_1) \le S(D_2)$.
Důkaz.: Nechť $D^* = D_1 \cup D_2$ společné zjemnění. Potom

$$s(D_1) \le s(D^*) \le S(D^*) \le S(D_2)$$

□

DŮSLEDEK:

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\mathrm{d}x \leq \int_{a}^{\underline{b}} f(x)\mathrm{d}x$$

DEFINICE 2.2 (RIEMANNŮV INTEGRÁL.) Nechť $f(x) : [a;b] \to \mathbb{R}$ je omezená. Pokud

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{\overline{b}} f(x)\mathrm{d}x,$$

pak toto číslo nazvu RIEMANNŮV INTEGRÁL $f(x)$ na $[a;b]$. Značím

$$(\mathcal{R}) \int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

LEMMA 2.0 lemma 2.0 TVRZENÍ: Funkce $f(x)$ má Riemannův integrál $\Leftrightarrow \forall \varepsilon\ \exists D$ (dělení) tak, že

$$S(D) - s(D) < \varepsilon.$$

DŮKAZ LEMMATU 2.0 $\varepsilon > 0$ dáno $\left.\begin{matrix} \exists D_1 : s(D_1) > \int_{\underline{a}}^{b} f(x)\mathrm{d}x - \frac{\varepsilon}{2} \\ \exists D_2 : S(D_2) < \int_{a}^{\overline{b}} f(x)\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2} \end{matrix}\right\} D^* = D_1 \cup D_2$

$$\begin{array}{c} S(D^*) \leq S(D_2) \\ \underline{s(D^*) \geq s(D_1)} \\ S(D^*) - s(D^*) < \varepsilon \end{array}$$

□

PŘÍKLAD 2.1

1. $f(x) = C$, $x \in [a;b]$, D je libovolné
   $m_i = M_i = C\ \forall i$
   $s(D) = C \cdot (b-a)$, $S(D) = C \cdot (b-a)$
   $\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\mathrm{d}x - \int_{a}^{\overline{b}} f(x)\mathrm{d}x = C \cdot (b-a)$

2. $f(x) = \mathcal{D}(x) \ldots$ Dirichletova funkce, $x \in [a;b]$, D libovolné
   nabývá jen 0 - v každém intervalu alespoň 1 bod nabyde 1 a 0.
   $m_i = 0, M_i = 1\ \forall i = 1, \ldots, n$
   - bude tam aspoň 1 racionální číslo.
   $\left.\begin{matrix} s(D) = 0 = \int_{\underline{a}}^{b} \mathcal{D}(x)\mathrm{d}x = 0 \\ S(D) = 1\ \forall D \end{matrix}\right\}$ nemá Riemannův integrál.

3. $f(x) = x$, $y_i \in [0;1]$, $D : x_i = \frac{i}{n}$, $i = 1, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}$ pevné

   dolní součet:
   m_i - inf té funkce: $m_i = f(x_{i-1}) = \frac{i-1}{n}$, délka intervalu $\frac{1}{n}$.
   $s(D) = \sum_{i-1}^{n} \frac{i-1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} (i-1) = \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{2}n(n+1) - n\right)$
   $m_i = \frac{1}{2}$ pro $n \to +\infty \Rightarrow \int_{\underline{a}}^{b} \geq \frac{1}{2}$.

horní součet:
$S(D) = \sum_{i-1}^{n} \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\frac{1}{2}n(n+1)$, limitně se blíží $\frac{1}{2}$
$M_i = f(x_i) = \frac{i}{n}$ (nabývá se v horním bodě)

$\frac{1}{2} \leq \underline{\int_a^b} \leq \overline{\int_a^b} \leq \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow\ (\mathcal{R}) \int_0^1 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

Lemma 2.1 Funkce $f(x)$ má Riemannův integrál $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon$ $\exists D$ (dělení) tak, že

$$S(D) - s(D) < \varepsilon.$$

Důkaz lemmatu 2.1

- „$\Rightarrow$“

  $\varepsilon > 0$ dáno.

  $$(\mathcal{R}) \int_a^b = \underline{\int_a^b} = \overline{\int_a^b}.$$

  Nechť $D^* = D_1 \cup D_2$ je zjemnění dělení. Potom dolní součet roste, $s(D^*)$ se přibližuje k $\int$ & $S(D^*)$ klesá a přibliží se k $\int$.

  $\Rightarrow$ to jsme chtěli najít.

- „$\Leftarrow$“ negací:

  Když $\neg\exists(\mathcal{R}) \int$ $\Rightarrow$ není spněna podmínka: $\underline{\int_a^b} < \overline{\int_a^b}$ - není splněno s $\varepsilon < \ldots$ (??? doplním později)

$\square$

Věta 2.1 Nechť $f(x) : [a; b] \to \mathbb{R}$ je omezená, <u>monotónní</u>. Potom existuje $(\mathcal{R}) \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Důkaz věty 2.1 Definuji dělení: $D : x_i = a + \frac{i}{n} \cdot (b - a)$, kde $i = 1, \ldots, n$, interval $[a; b]$ rozdělím na n stejných délek.
BÚNO nechť $f(x)$ je neklesající. Potom $m_i = f(x_{i-1})$ a $M_i = f(x_i)$. Velikost jednoho dílku je $x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$. Pro součty platí vztah:
$S(D) - s(D) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_{i-1} - x_i) = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})] \cdot \frac{1}{n} \cdot (b-a)$, kde $\frac{1}{n} \cdot (b-a)$ je konstanta nezávislá na i.
$(f(x_1) - f(x_0)) + (f(x_2) - f(x_1)) + (f(x_3) - f(x_2)) + \ldots + (f(x_n) - f(x_{n-1})) = \sum_i f(x_n) - f(x_0) = f(b) - f(a)$
Tedy $S(D) - s(D) = \frac{1}{n} \cdot (b - a) \cdot (f(b) - f(a))$, kde $(f(b) - f(a))$ je konstanta.
Pro n dost velké je $(b - a)$ hodně malé.
$\Rightarrow$ $S(D) - s(D)$ může být libovolně malé $\Rightarrow$ dle Lemmatu 2.1 $(\mathcal{R}) \int_a^b$ existuje (vezmu n tak, aby výraz $< \varepsilon$, pak to vyjde.)

□

DEFINICE 2.3 (SPOJITOST NA $\mathcal{I}$.) Řekneme, že $f(x)$ je SPOJITÁ NA $\mathcal{I}$, jestliže $\forall x \in \mathcal{I}$ $\exists \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$: $\forall y \in \mathcal{U}^{\delta}(x) \cap \mathcal{I} \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}^{\varepsilon}(f(x))$. Na kraji $\mathcal{I}$ jen jednostranné okolí.

DEFINICE 2.4 (OBYČEJNÁ SPOJITOST.) Řekneme, že $f(x)$ je SPOJITÁ, jestliže $\forall \varepsilon > 0$ $\forall x \in \mathcal{I}$ $\exists \delta > 0$: $\forall y \in \mathcal{I}$: $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

DEFINICE 2.5 (STEJNOMĚRNÁ SPOJITOST.) Řekneme, že $f(x)$ je STEJNOMĚRNĚ SPOJITÁ, jestliže $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ $\forall x \in \mathcal{I}$ $\forall y \in \mathcal{I}$: $\forall y \in \mathcal{I}$: $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ $(*)$

Pro dané ε univerzální δ - $\forall y$.

LEMMA 2.2 Nechť $f(x)$ je spojitá na uzavřeném, omezeném intervalu $\mathcal{I} = [a;b]$. Potom $f(x)$ je stejnoměrně spojitá na $\mathcal{I}$.

DŮKAZ LEMMATU 2.2 SPOREM: není stejnoměrně spojitá $\Rightarrow$ není spojitá.
Nechť ne $(*)$: $\exists \varepsilon > 0$¿ $\forall \delta > 0$ $\exists x, y \in \mathcal{I}$: $|x-y| < \delta$ & $|f(x) - f(y)| \geq \delta$. Fixuji $\varepsilon > 0$:
$\delta = \frac{1}{n} \Rightarrow \exists x_n, y_n \in \mathcal{I}$ $|x_n - y_n| < \frac{1}{n} = \delta$,
$|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$
Posloupnost $\{x_n\}$ má hromadný bod $x_0 \in \mathcal{I}$
$f(x)$ je spojitá v x_0: $\exists \delta > 0$ $x \in \mathcal{U}^{\delta}(x_0) \cap \mathcal{I} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$.
$\mathcal{U}^{\frac{\delta}{2}}(x_0)$ obsahuje ∞ členů posloupnosti $\{x_n\}$. Speciálně obsahuje x_n takové, že $\frac{1}{n} < \frac{\delta}{2} \Leftrightarrow n > \frac{2}{\delta}$, kde n je dost velké
Tedy: $x_n \in \mathcal{U}^{\frac{\delta}{2}}(x_0)$ $|x_n - y_n| < \frac{1}{n} < \frac{\delta}{2} \Rightarrow y_n \in \mathcal{U}^{\delta}(x_0)$, y_n nejvýš o $\frac{\delta}{2}$ dál
$|f(x_n) - f(y_n)| = |f(x_n) - f(x_0) + f(x_0) - f(y_n)| \leq |f(x_n) - f(x_0)| + |f(y_n) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} < \frac{\varepsilon}{2}$
SPOR: $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ z definice.

□

VĚTA 2.2 Spojitá funkce na uzavřeném intervalu má Riemannův integrál.

Neboli $\mathcal{C}([a;b]) \subseteq \mathcal{R}([a;b])$.

DŮKAZ VĚTY 2.2 $f(x) : [a;b] \to \mathbb{R}$ je spojitá. $\varepsilon > 0$ libovolné. Stejnoměrná spojitost ($\to$ Lemma 2.2): $\exists \delta > 0$ $\forall x, y \in [a;b]$: $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
Zvol dělení D (rovnoměrné): $x_i = a + \frac{i}{n} \cdot (b-a)$, $i = 0, \ldots, n$ (n intervalů), n tak velké, aby $\frac{1}{n}(b-a) < \delta$, $(b-a) = (x_{n-1} - x_i)$
Klíčové porovnání:
$M_i - m_i \leq \varepsilon$
2 body - jejich rozdíl $< \delta \Rightarrow$ jejich fukněční hodoty $< \delta$
M_i sup, M_i inf $\Rightarrow$ musí se sejít, protože sup a inf se nabývají na spojitém uzavřeném intervalu.
$M_i = \sup f(\mathcal{I}_i) = f(\alpha_i)$, $\exists \alpha \in \mathcal{I}_i$, kde $\mathcal{I}_i = [x_{i-1}; x_i]$
$m_i = \inf f(\mathcal{I}_i) = f(\beta_i)$, $\exists \beta \in \mathcal{I}_i$
. Platí $|\alpha_i - \beta_i| < \delta$
$S(D) - s(D) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_{i-1} - x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \varepsilon \cdot \frac{b-a}{n} = \varepsilon(b-a)$, kde ε je libovolně malé (z poznámky o ε-ech)

$\Rightarrow$ (Lemma 2.1) ... existuje Riemannův integrál.

□

LEMMA 2.3 (O aditivitě dolního integrálu.) Nechť $a < c < b$. Potom

$$\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \underline{\int_a^c} f(x)\mathrm{d}x + \underline{\int_c^b} f(x)\mathrm{d}x,$$

má-li jedna strana smysl.

DŮKAZ LEMMATU 2.3 $\left.\begin{array}{l} D_1 \ldots \text{ dělení}[a;c] \\ D_2 \ldots \text{ dělení}[c;b] \end{array}\right\}$ libovolná. Polož $D = D_1 \cup D_2 \Rightarrow$ zjemnění dělení $[a;b]$.
Zřejmě: $s(D_1) + s(D_2) = s(D) \leq \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$
D dělení $[a;b]$, $D^* = D \cup \{0\} \ldots$ aby se dalo rozdělit na další dělení. Pak $\underline{\int_a^c} f(x)\mathrm{d}x + s(D_2) \leq \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$/přes všechna sup D
$D^* = D_1 \cup D_2$:

$$\underline{\int_a^c} f(x)\mathrm{d}x + \underline{\int_c^b} f(x)\mathrm{d}x \leq \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x \ (\clubsuit)$$

Zjemnění - může se nejvýše zvětšit: $s(D) \leq s(D^*) = s(D_1) + s(D_2) \leq \underline{\int_a^c} f(x)\mathrm{d}x + \underline{\int_c^b} f(x)\mathrm{d}x$/přejdu k sup D
$(\clubsuit) \rightarrow \underline{\int_a^c} f(x)\mathrm{d}x \leq \underline{\int_a^c} f(x)\mathrm{d}x + \underline{\int_c^b} f(x)\mathrm{d}x \Rightarrow$

$$\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \underline{\int_a^c} f(x)\mathrm{d}x + \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$$

□

LEMMA 2.3 ' (O aditivitě horního integrálu.) Nechť $a < c < b$. Potom

$$\int_a^{\overline{b}} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{\overline{c}} f(x)\mathrm{d}x + \int_c^{\overline{b}} f(x)\mathrm{d}x,$$

má-li jedna strana smysl.

DŮKAZ LEMMATU 2.3 Analogicky jako v Lemmatu 2.3 .

□

VĚTA 2.3 (O aditivitě Riemannova integrálu.) Nechť $a < c < b$. Potom

$$(\mathcal{R})\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (\mathcal{R})\int_a^c f(x)\mathrm{d}x + (\mathcal{R})\int_c^b f(x)\mathrm{d}x,$$

má-li jedna strana smysl.
DŮKAZ VĚTY 2.3 $-\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = -\underline{\int_a^c} f(x)\mathrm{d}x - \underline{\int_c^b} f(x)\mathrm{d}x$
$\int_a^{\overline{b}} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{\overline{c}} f(x)\mathrm{d}x + \int_c^{\overline{b}} f(x)\mathrm{d}x$

$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\mathrm{d}x - \int_{a}^{\overline{b}} f(x)\mathrm{d}x = \left(\int_{a}^{\overline{c}} f(x)\mathrm{d}x - \int_{\underline{a}}^{c} f(x)\mathrm{d}x\right) + \left(\int_{c}^{\overline{b}} f(x)\mathrm{d}x - \int_{\underline{c}}^{b} f(x)\mathrm{d}x\right)$
„$\Rightarrow$ “ pokud RHS má smysl:
$\Delta_1 = \Delta_2 = 0 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow \exists\ (\mathcal{R}) \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.
„$\Leftarrow$ “ pokud LHS má smysl:
$\Delta = 0 = \Delta_1 + \Delta_2\ \&\ \Delta_1, \Delta_2 \geq 0$ (zároveň součet 0) $\Rightarrow \Delta_1 \mp \Delta_2 = 0 \Rightarrow$ mají smysl Δ_1, Δ_2 obě strany mají smysl.

$\square$

Definice 2.6 Dodatek k definici Riemannova integrálu: Pro $a > b$

$$(\mathcal{R}) \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -(\mathcal{R}) \int_b^a f(x)\mathrm{d}x$$

a dále

$$(\mathcal{R}) \int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

Věta 2.3 ' (O aditivitě Riemannova integrálu.) Nechť $a, b, c \in \mathbb{R}$. Potom

$$(\mathcal{R}) \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (\mathcal{R}) \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + (\mathcal{R}) \int_c^b f(x)\mathrm{d}x,$$

má-li jedna strana smysl.

Důkaz věty 2.3 $a < c < b \ldots$ viz Věta 2.3 .
Nechť $a < c = b$: $(\mathcal{R}) \int_c^b f(x)\mathrm{d}x = 0$.
Nechť $a < b < c$: $(\mathcal{R}) \int_a^c f(x)\mathrm{d}x = (\mathcal{R}) \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + (\mathcal{R}) \int_b^c f(x)\mathrm{d}x = (\mathcal{R}) \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - (\mathcal{R}) \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

$\square$

Poznámka 2.3 Poznámky k Riemannovu integrálu.

1. $f \leq g$ na $[a;b] \Rightarrow (\mathcal{R}) \int_a^b f \leq (\mathcal{R}) \int_a^b g$
2. $|f| \leq M$ v $[a;b] \Rightarrow \left|(\mathcal{R}) \int_a^b f\right| \leq M \cdot (b-a)$
3. linearita: $(\mathcal{R}) \int_a^b (\alpha \cdot f + \beta \cdot g) = \alpha(\mathcal{R}) \int_a^b f + \beta(\mathcal{R}) \int_a^b g$
4. $f = g$ v $[a;b] \setminus K$, kde K je konečná množina. Pak $(\mathcal{R}) \int_a^b f = (\mathcal{R}) \int_a^b g$
   Důsledek: $f(x)$ stačí definovat až na KM.

Příklad 2.2 $\mathcal{R}(x) = \begin{cases} 0, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q}, x = \frac{p}{x}, p, q \text{ nesoudělná} \end{cases}$
Tvrdím: $(\mathcal{R}) \int_0^1 \mathcal{R}(x)\mathrm{d}x = 0$
$\int_{\underline{0}}^1 \mathcal{R}(x)\mathrm{d}x = 0$
??? $\int_0^{\overline{1}} \mathcal{R}(x)\mathrm{d}x = 0$
Klíčové pozorování:

1. ε dáno;
2. existuje nejvýše k bodů $\{\alpha_j : j = 1, \dots, K\}, \alpha_j \in [0;1]$: $f(\alpha_j) \geq \varepsilon$
   $\alpha_j = \frac{p}{q}$; $0 \leq p \leq q$ & $f(\alpha_j) = \frac{1}{q} > \varepsilon \Rightarrow q \leq \frac{1}{\varepsilon}$

$D : x_i = \frac{i}{n}$; $i = 0, \dots, n$ - rovnoměrné dělení
n tak velké, že $\frac{k}{n} < \varepsilon$
$S(D) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_{i-1} - x_i) = \sum_{i=1}^{n} M_i \frac{1}{n} = \sum_{i \in I_1} M_i \frac{1}{n} + \sum_{i \in I_2} M_i \frac{1}{n}$
Zavedu dvě množiny:
$I_1 := \{i : [x_{i-1}; x_i]$ neobsahuje žádný z $\{\alpha_j\}$
$I_2 := \{i : [x_{i-1}; x_i]$ obsahuje alespoň jeden z $\{\alpha_j\}$

1. $i \in I_1 \Rightarrow M_i \leq \varepsilon$
2. počet prvků I_2 je menší než $2K$:

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i \in I_1}^{M_i < \varepsilon} M_i \frac{1}{n} + \sum_{i \in I_2}^{M_i \leq 1} M_i \frac{1}{n} \ \forall i \\
&\leq \varepsilon \cdot \frac{n}{n} + 1 \cdot \frac{2k}{n} \\
&\leq \varepsilon + 2\varepsilon = 3\varepsilon
\end{aligned}
$$

Tvrdím: $(\mathcal{N}) \int_0^1 \mathcal{R}(x) \mathrm{d}x$ neexistuje.

$\mathcal{R}(x)$ nemá ZPF
$\Rightarrow$ nemá Darbouxovu vlastnost na žádném intervalu

Úmluva značení 2.1

- $f(x) \in \mathcal{R}([a;b])$ značí: existuje $(\mathcal{R}) \int_a^b f(x) \mathrm{d}x$.
- $f(x) \in \mathcal{C}(\mathcal{I})$ značí: $f(x)$ je spojitá v $\mathcal{I}$.

Věta 2.4 Nechť $f(x) \in \mathcal{R}([a;b])$. Označme $F(x) := (\mathcal{R}) \int_c^X f(t) \mathrm{d}t$, kde $c \in [a;b]$ je pevně zvolené. Potom

1. $F(x) \in \mathcal{C}([a;b])$
2. Je-li $f(x)$ spojitá v bodě $x_0 \in [a;b]$ (resp. spojitá zleva / zprava), potom $F'(x_0) = f(x_0)$ (resp. $F'_-(x_0) = f(x_0)$ / $F_+(x_0) = f(x_0)$).

Poznámka 2.4 $F(x)$ má vždy „o řád“ lepší vlastnosti než $f(x)$.

Důkaz věty 2.4

1. $|F(x) - F(y)| = |\int_c^x - \int_c^y| =$ dle Věty 2.3 $= |\int_y^x f| \leq M \cdot |x - y| \dots |f| \leq M$
   $\varepsilon > 0$ dáno, položme $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$. Potom $(x - y) < \delta \Rightarrow |F(x) - F(y)| < \varepsilon$ spojitost dokonce stejnoměrná.

2. pro $f(x)$ spojitost v x_0 zprava. Cíl: $F'_+(x_0) = f(x_0)$.
   $\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_c^{x_0+h} - \int_c^{x_0}\right] = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x) - f(x_0)\mathrm{d}x + \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0+h) = I(h) + f(x_0)$
   Chci dokázat: $I(h) \to 0$ pro $h \to 0+$.
   $\varepsilon > 0$ dáno: $\exists\delta > 0$; $x \in [x_0; x_0+\delta] \Rightarrow |f(x) - f(x_0)|$
   $h \in \left(0, \frac{\delta}{2}\right)$, potom $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ pro $x \in [x_0; x_0+h]$
   $|I(h)| < \frac{1}{h}\cdot\varepsilon\cdot h = \varepsilon$

□

Věta H $f(x) \in \mathcal{C}((a;b)) \Rightarrow \exists F(x)$ primitivní funkce k $f(x)$ v $(a;b)$.

Důkaz věty H Zvolme $c \in (a;b)$, položme pro $x \in (a;b)$ $F(x) := (\mathcal{R})\int_c^x f(t)\mathrm{d}t$.

1. definice: má smysl dle Věty 2.2
2. $F' = f$ dle Věty 2.4 + spojitost funkce f

□

Poznámka 2.5

1. $\int \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = (\mathcal{R})\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ ... nelze napsat jako elementární funkci
2. $(\mathcal{R})\int_0^x t^2\mathrm{d}t = \frac{x^3}{3}$

Věta 2.5 Nechť $f(x) \in \mathcal{C}([a;b])$. Potom

$$(\mathcal{N})\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (\mathcal{R})\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Důkaz věty 2.5 Položme $F(x) := (\mathcal{R})\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, $\forall x \in [a;b]$.
Tvrdím: $F(x) \in$ ZPF $(F'(x); (a;b))$ (neboť $F(x) \in \mathcal{C}((a;b))$ & $F' = f$ v $(a;b)$ ... z Věty 2.4)
$(\mathcal{N})\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) = (\mathcal{R})\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ (spojitá $F(x)$ v krajích)

□

Příklad 2.3 $F(x) = \int_x^c f(x)\mathrm{d}t$; $F'(x) =$???
(předpoklad: $f(x) \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$)

Příklad 2.4 P ... plocha pod grafem
$(\diamondsuit)$ $s(D) \le P \le S(D)$ $\forall D$
$(\mathcal{R})\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ existuje $\Rightarrow$ je jediné číslo, které splňuje $(\diamondsuit)$.

Příklad 2.5

1. Obsah trojúhelníku: ... OK.
2. Obsah pod Dirichletovou funkcí $\mathcal{D}(x)$ ... Riemannův integrál nerozhodne, neumí.

PŘÍKLAD 2.6 OBJEM ROTAČNÍHO TĚLESA.

Dáno: $f(x)$, zjistím si m_i, M_i. Pro V_i platí $V_i \leq \pi M_i^2(x_i - x_{i-1})$. Má platit:

$$\pi m_i^2(x_i - x_{i-1}) \leq V_i \leq \pi M_i^2(x_i - x_{i-1})$$

$$s\left(D, \pi f^2(x)\right) = \sum_{i=1}^{n} \pi m_i^2(x_i - x_{i-1}) \leq V \leq \sum_{i=1}^{n} \pi M_i^2(x_i - x_{i-1}) = S\left(D, \pi f^2(x)\right)$$

$$V = (\mathcal{R}) \int_a^b \pi f^2(x) \mathrm{d}x$$

PŘÍKLAD 2.7 PLOCHA V POLÁRNÍCH SOUŘADNICÍCH.

Dáno: $r = r(x)$, $x \in [a; b]$. D ... dělení $[a; b]$. Pak

$$M_i = \sup_{[x_{i-1}; x]} r(x)$$

$$m_i = \inf_{[x_{i-1}; x]} r(x)$$

$$\frac{m_i^2}{2}(x_i - x_{i-1}) \leq P_i \leq \frac{M_i^2}{2}(x_i - x_{i-1})$$

$$s\left(D, \frac{1}{2} r^2(x)\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i^2}{2}(x_i - x_{i-1}) \leq P \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{M_i^2}{2}(x_i - x_{i-1}) = S\left(D, \frac{1}{2} r^2(x)\right)$$

$$P = (\mathcal{R}) \int_a^b \frac{r^2(x)}{2} \mathrm{d}x$$

PŘÍKLAD 2.8 DÉLKA KŘIVKY.

dolní odhad na délku, horní odhad na délku ... $\mathrm{d}l = \frac{\mathrm{d}x}{\cos\alpha} = \sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\alpha}\mathrm{d}x$

$$M_i = \sup\{|f'(x)|; x \in [x_{i-1}; x]\}$$

$$m_i = \inf\{|f'(x)|; x \in [x_{i-1}; x]\}$$

$$\sqrt{1 + m_i^2}(x_i - x_{i-1}) \leq L_i \leq \sqrt{1 + M_i^2}(x_i - x_{i-1})$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + m_i^2}(x_i - x_{i-1}) \leq L \leq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + M_i^2}(x_i - x_{i-1})$$

$$s\left(D, \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\right) \leq L \leq S\left(D, \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\right)$$

$$L = (\mathcal{R}) \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \mathrm{d}x$$

Kapitola 3

Nekonečné řady

Pojmy v této kapitole: Řada, částečný součet řady, konvergence, divergence, oscilace, nekonvergence řady, velké O, řádová rovnost, konvergence v $\mathbb{C}$, konvergence komplexní řady, absolutní konvergence komplexní řady, neabsolutní konvergence komplexní řady, přerovnání řady. Věta o nutné podmínce konvergence, d'Allembertovo podílové kritérium, Cauchyho odmocninové kritérium, integrální kritérium, Raabeho kritérium, Bolzano-Cauchyova podmínka konvergence řady, Leinbizovo kritérium, Abelovo sumační lemma, Direchletovo kritérium, omezené částečné součty, Abelovo kritérium, Cauchyův součet řad.

Definice 3.1 (Řada.) Řadou rozumíme symbol

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad \text{kde } a_n \in \mathbb{R}(\in \mathbb{C})$$

Definice 3.2 (Částečný součet řady. Součet řady.)

$$S_N := \sum_{n=1}^{N} a_n.$$

Pokud $S_N \to S$ pro $N \to \infty$ říkáme, že řada má součet S, píšeme

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

Definice 3.3 (Konvergence, divergence, oscilace (nekonvergence) řady.)

Pokud $S \in \mathbb{R}$ ($S \in \mathbb{C}$), řada konverguje.

Pokud $S = \pm\infty$, řada diverguje.

Pokud $\lim_{N\to\infty} S_N$ neexistuje, řada osciluje (nekonverguje).

Příklad 3.1

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 \ldots$ teleskopická řada

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$(1-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) + (\frac{1}{3}-\frac{1}{4}) + \ldots + (\frac{1}{N}-\frac{1}{N+1})$$

$$S_N = 1 - \frac{1}{N+1}, \qquad \lim_{N\to\infty} S_N = 1$$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty \ldots$ harmonická řada

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16} + \frac{1}{2^{n-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^n},$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geq 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$
$$\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8} \geq 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2},$$
$$\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16} \geq 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2},$$
$$\vdots$$
$$\frac{1}{2^{n-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^n} \geq \frac{2^n}{2} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}$$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$

$$S_N := -1, 0, -1, 0, -1, 0, \ldots \text{ osciluje}$$

4. !!! $\sum_{n=1}^{\infty} q^n = S, q \geq 0$

   a) $q \geq 1$: $q^n \geq 1$ $\forall n$: $S_N \geq N \Rightarrow S = +\infty$

   b) $q \in [0;1)$

   $(1-q)(1+q+q^2+\ldots+q^N) = 1 - q^{N+1}$, označme $S_N = 1+q+q^2+\ldots+q^N$: $S_N = \frac{1-q^{N+1}}{1-q} \to \lim_{N\to\infty} S_N = \frac{1}{1-q}$

Věta 3.1 Nechť $c_n = \alpha a_n + \beta b_n$. Potom

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

má-li RHS smysl.

Důkaz věty 3.1 Nechť A_N, B_N, C_N josu částečné součty řad $\sum a_n, \sum b_n, \sum c_n$. Potom $C_N = \alpha \cdot A_N + \beta \cdot B_N$. A užiju větu o aritmetice limit.

□

VĚTA 3.2 (Nutná podmínka konvergence.) Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Potom $a_n \to 0$ pro $n \to \infty$.

DŮKAZ VĚTY 3.2 Řada konverguje: $S_N \to S \in \mathbb{R}$. Potom také $S_N \to S$.

$$0 \leftarrow a_N = S_N - S_{N-1} = S - S = 0$$

□

POZNÁMKA 3.1 Podmínka $a_n \to 0$ není pro konvergenci postačující. Viz $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

POZNÁMKA 3.2 Nechť $\sum a_n$, $\sum \tilde{a_n}$ se liší v konečně členech. Potom $S_N = \tilde{S_N} + C$ pro $N \geq n_0$.

3.1 Řady s nezápornými členy

LEMMA 3.1 Nechť $a_n \geq 0$. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\Leftrightarrow$ $\{S_N\}$ je omezená.

DŮKAZ LEMMATU 3.1 $a_n \geq 0 \Rightarrow S_N$ je neklesající $\Rightarrow$ má limitu S. $S < +\infty \Leftrightarrow \{S_N\}$ je omezená.

□

LEMMA 3.2 Nechť $0 \leq a_n \leq b_n$. Potom

1. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje.

DŮKAZ LEMMATU 3.2

1. S_N, T_N částečné součty $\sum a_n$, $\sum b_n$: $S_N \leq T_N$. Dle Lemmatu 3.1 : konverguje $\Leftrightarrow$ omezenost částečných součtů.

□

POZNÁMKA 3.3 DŮLEŽITÝ DODATEK: Lemma platí, i když $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $0 \leq a_n \leq b_n$ pro $n \geq n_0$.

DEFINICE 3.4 (O (velké O).)

$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ jsou posloupnosti. Řekneme, že $a_n = O(b_n)$ pro $n \to \infty$, pokud $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\exists c > 0$: $\forall n > n_0$ $|a_n| \leq C \cdot |b_n|$.

DEFINICE 3.5 (Řádová rovnost.)

Řekneme, že $\{a_n\} \sim \{b_n\}$ ($\{a_n\}$ je řádově rovno $\{b_n\}$), pokud $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

VĚTA 3.3 Nechť $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$.

1. Je-li $a_n = O(b_n)$ a $\sum b_n$ konverguje, potom též $\sum a_n$ konverguje.
2. Je-li $a_n \sim b_n$, potom $\sum a_n$ konverguje $\Leftrightarrow \sum b_n$ konverguje.

DŮKAZ VĚTY 3.3

1. $a_n = O(b_n) \dots \exists n_0 \in \mathbb{N}$, $c > 0$: $|a_n| \leq C \dots |b_n|$ $\forall n \geq n_0$
   $a_n, b_n \geq 0$: $0 \leq a_n \leq C \cdot b_n$ BÚNO $\forall n \in \mathbb{N}$
   $\rightarrow C \cdot b_n \dots$ konverguje $\Rightarrow a_n \dots$ konverguje
   $\sum a_n$ konverguje dle Lemmatu 3.2
2. $a_n \sim b_n \Rightarrow$ (pro $n \rightarrow \infty$) $a_n = O(b_n)$ a $b_n = O(a_n)$
   dle 1): $\sum b_n$ konverguje $\Leftrightarrow \sum a_n$ konverguje

□

PŘÍKLAD 3.2 $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2^n}\right)$

$\operatorname{tg} x \sim x$ pro $x \rightarrow 0$

$\left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 0 \dots \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2^n}\right) \sim \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2^n}\right)$

$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}\right)$ konverguje

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2^n}\right)$ konverguje

$0 \leq \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2^n}\right)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

POZNÁMKA 3.4 Předpoklad $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ je <u>PODSTATNÝ</u>.

VĚTA 3.4 (<u>D'ALLEMBERTOVO PODÍLOVÉ KRITÉRIUM.</u>) Nechť $a_n \geq 0$, nechť $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow q$.

1. Je-li $q < 1$, pak řada $\sum a_n$ konverguje.
2. Je-li $q > 1$, pak řada $\sum a_n$ diverguje.

DŮKAZ VĚTY 3.4

1. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow q < 1$. Zvolme $p \in (q; 1)$. Potom $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} < p$ $\forall n \geq n_0$.
   BÚNO: Nechť $\frac{a_{n+1}}{n} < p$ $\forall n \geq 0$
   $a_1 < p \cdot a_0$
   $a_2 < p \cdot a_1 < p^2 \cdot a_0$
   obecně: $0 \leq a_n \leq a_0 \cdot p^n$, $p < 1 \Rightarrow \sum a_n$ konverguje.
2. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow q > 1 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$: $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ $\forall n \geq n_0$
   BÚNO platí $\forall n \in \mathbb{N}$. Pak $a_2 > a_1$
   $a_3 > a_2 > a_1$
   $a_n > a_1 \dots$ nelze, aby $a_n \rightarrow 0$.
   $\sum a_n$ nemůže konvergovat $\Rightarrow$ diverguje.

□

PŘÍKLAD 3.3

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \dots$ konverguje
   PODÍLOVÉ KRITÉRIUM:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ ... diverguje
PODÍLOVÉ KRITÉRIUM:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n+1!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = (1+\frac{1}{n})^n \to \mathrm{e} > 0$$

POZNÁMKA 3.5 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow 1$ ... nelze obecně nic říci:

Př.: $a_n = \frac{1}{n}$ ... harmonická řada ... diverguje, resp. $\frac{1}{n(n+1)}$ ... konverguje

VĚTA 3.5 (CAUCHYHO ODMOCNINOVÉ KRITÉRIUM.) Nechť $a_n \geq 0$, nechť $\sqrt[n]{a_n} \to q$.

1. Je-li $q < 1$, pak řada $\sum a_n$ konverguje.

2. Je-li $q > 1$, pak řada $\sum a_n$ diverguje.

DŮKAZ VĚTY 3.5

1. $\sqrt[n]{a_n} \to q < 1$. Zvolme $p \in (q; 1)$. Potom $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\sqrt[n]{a_n} < p \ \forall n \geq n_0$.
   BÚNO: Nechť $\sqrt[n]{a_n} < p \ \forall n \in \mathbb{N}$
   $0 \leq a_n \leq p^n$

2. $\sqrt[n]{a_n} \to q > 1 \Rightarrow \ldots \sqrt[n]{a_n} > 1$ pro $n \geq n_0$, $a_n > 1$ pro $n \geq n_0$.
   $a_n \not\to 0$ ... řada diverguje do $-\infty$.

□

PŘÍKLAD 3.4

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ konverguje
   $\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{3} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \to \frac{\mathrm{e}}{3} < 1$ ... konverguje

VĚTA 3.6 (INTEGRÁLNÍ KRITÉRIUM.) Nechť $f(x) : [1; +\infty)$ je spojitá, nezáporná a nerostoucí, nechť $a_n = f(n) \ \forall n \in \mathbb{N}$. Potom

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje } \Leftrightarrow (\mathcal{N}) \int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \text{ konverguje}$$

POZNÁMKA 3.6 $a_n \geq 0$: řada má součet
$f(x)$ spojitá, nezáporná ... $(\mathcal{N}) \int$ existuje

DŮKAZ VĚTY 3.6

$$\sum_{n=1}^{3} a_n \geq (\mathcal{N}) \int_1^4 f(x)\mathrm{d}x \geq (\mathcal{N}) \int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$$

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \geq (\mathcal{N}) \int_1^N f(x)\mathrm{d}x \qquad (\clubsuit)$$

$$\sum_{n=2}^{4} a_n \leq (\mathcal{N}) \int_1^4 f(x)\mathrm{d}x$$

$$\sum_{n=2}^{N} a_n \leq (\mathcal{N}) \int_1^N f(x)\mathrm{d}x \qquad (\spadesuit)$$

všechno plyne z ($\clubsuit$) a ($\spadesuit$)

$$\lim_{N\to\infty} (\mathcal{N}) \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (\mathcal{N}) \int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

$\square$

Věta 3.7 (<u>Raabeho kritérium.</u>) Nechť $a_n \geq 0$, nechť $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = p$. Potom

1. Je-li $p > 1$, pak řada $\sum a_n$ konverguje.
2. Je-li $p < 1$, pak řada $\sum a_n$ diverguje.

Poznámka 3.7 Raabe je „přesnější“ než d'Allembert.
Důkaz.: Pokud $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to q < 1$ (konvergence dle podílového kritéria), pak $\frac{a_n}{a_{n+1}} \to \frac{1}{q} > 1$
$\Rightarrow n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \to +\infty$;
$\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \to \frac{1}{q} - 1 > 0$

Poznámka 3.8 Raabe je lepší.
Důkaz.: $a_n = \frac{1}{n^2}$: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \to 1$
$\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = n \cdot \left(\frac{n^2}{(n+1)^2} - 1\right) = n \cdot \left(\left(\frac{1}{n} + 1\right)^2 - 1\right) = n\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} - 1\right) = 2 + \frac{1}{n} \to 2$

Důkaz věty 3.7

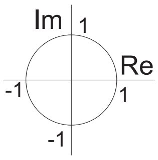
1. Zvolme $\rho \in (1; p)$, $\rho > 1$: $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq \rho$ pro $n \geq n_0$. BÚNO $n \in \mathbb{N}$. $n\left(a_n - a_{n+1}\right) \geq \rho a_{n+1} / - a_{n+1}$
   $na_n - (n+1)a_{n+1} \geq (\rho - 1)a_{n+1} / \sum_n$
   LHS $= (1\cdot\alpha_1 - 2\cdot\alpha_2) + (2\cdot\alpha_2 - 3\cdot\alpha_3) + \ldots + (n\cdot\alpha_n - (n+1)\cdot\alpha_{n+1}) \geq (\rho - 1)\sum_{n=1}^N a_n$
   $a_1 - (N+1)\cdot a_{N+1} \leq a_1$, kde $(N+1)\cdot a_{N+1} \leq 0$
   $a_1 \geq (\rho - 1)\sum_{n=1}^N a_n / \cdot \frac{1}{\rho - 1}$, kde $(\rho - 1) \geq 1$, protože $\rho > 1$
   $\frac{a_1}{\rho - 1} \geq \sum_{n=1}^N a_n = S_N \ldots \{S_N\}$ je omezená $\Rightarrow$ Lemma 3.1 : řada konverguje

2. $n\left(a_n - a_{n+1}\right) < \rho$ pro $n \geq n_0$; BÚNO: $\forall n \in \mathbb{N}$. Zvolme $\rho \in (p; 1)$.
   Stejný postup ... vysčítám to ...
   $a_1 - (N+1)a_{N+1} \leq (\rho - 1)\sum_{n=1}^N a_n \leq 0$ kde $(\rho - 1) < 0$
   $a_{N+1} \geq \frac{a_1}{N+1} \sim \frac{1}{N}$ ... diverguje.

$\square$

3.2 Řady s komplexními členy

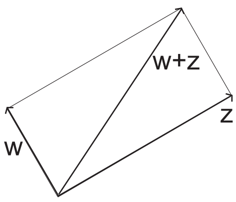
ÚMLUVA ZNAČENÍ 3.1 $.z \in \mathbb{C}$; $z = x + iy$; kde $x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1$

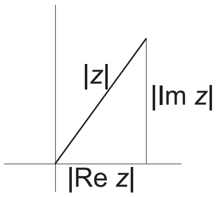


$x =$ Re z, $y =$ Im z
$\overline{z} = x - iy$ ... komplexně sdružené
$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ... absolutní hodnota
$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$

Platí:
1. $\Delta-$ NEROVNOST: $|z + w| \leq |z| + |w| \; \forall z, w \in \mathbb{C}$
2. $\max\{\text{ Re } z, \text{Im } z \} \leq |z| \leq |\text{Re } z| + |\text{Im } z|$ ($\spadesuit$)

Důkaz:

1. 

2. 

$\mathbb{C}$ nelze uspořdat relací „<“.
Důkaz: sporem: $i \neq 0$
$i > 0 \vee i < 0$: $i > 0 \; / \cdot i$
$i^2 > 0$
$-1 > 0$ ... spor

DEFINICE 3.6 (<u>KONVERGENCE V $\mathbb{C}$.</u>) Nechť $z_n \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$.

$$\lim_{n\to\infty} z_n \to z : \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 : |z_n - z| < \varepsilon.$$

POZNÁMKA 3.9 $z_n \to z \Leftrightarrow$ Re $z_n \to$ Re z & Im $z_n \to$ Im z (z nerovnosti ($\spadesuit$).)

POZNÁMKA 3.10 Důsledek: aritmetika limit: $z_n \to z$, $w_n \to w \Rightarrow z_n + w_n \to z + w$, dále $z_n \cdot w_n \to z \cdot w$

LEMMA 3.3 Nechť $z_n \in \mathbb{C}$. Pak $\{z_n\}$ je konvergentní, právě když je cauchyovská (splňuje Bolzano-Cauchyovu podmínku).

DŮKAZ LEMMATU 3.3 $\{z_n\}$ splňuje B-C podmínku: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N}$: $\forall m, n \geq n_0 \Rightarrow$ $|z_n - z_m| < \varepsilon$, kde $|z_n - z_m|$ je komplexní absolutní hodnota
$\Leftrightarrow$ {Re z_n}, {Im z_n} splňují B-C podmínku (pomocí nerovnosti ($\spadesuit$).)
$\Leftrightarrow$ {Re z_n}, {Im z_n} jsou konvergentní $\Leftrightarrow$ $\{z_n\}$ je konvergentní

□

DEFINICE 3.7 (<u>KONVERGENCE KOMPLEXNÍ ŘADY.</u>) Nechť $c_n \in \mathbb{C}$. Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konverguje, pak $S_N \Rightarrow S \in \mathbb{C}$ ($S_N = \sum_{n=1}^{N} c_n$).

LEMMA 3.4 (BOLZANO-CAUCHYOVA PODMÍNKA KONVERGENCE ŘADY.) Řada $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, $c_n \in \mathbb{C}$ konverguje, právě když

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall N \geq n_0\ \forall P \in \mathbb{N} : \ |\sum_{n=N+1}^{N+P} c_n| < \varepsilon.$$

DŮKAZ LEMMATU 3.4 $\sum c_n$ konvergentní $\Leftrightarrow S_N$ splňuje B-C podmínku:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ \forall M, N \geq n_0 \ \Rightarrow\ |S_M - S_N| < \varepsilon$$

BÚNO: $M \geq N$: $P = M - N$
$S_M - S_N = \sum_{n=N+1}^{M} c_n$

□

DEFINICE 3.8 (ABSOLUTNÍ KONVERGENCE KOMPLEXNÍ ŘADY.) Řekneme, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n \in \mathbb{C}$) KONVERGUJE ABSOLUTNĚ, pokud konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

LEMMA 3.5 Pokud řada konverguje absolutně, pak konverguje.

DŮKAZ LEMMATU 3.5 Ověřit B-C podmínku: $\varepsilon > 0$ dáno.
$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje $\Rightarrow$ (B-C podmínka:)

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall N \geq n_0\ \forall P \in \mathbb{N} : \ \sum_{n=N+1}^{N+P} |a_n| < \varepsilon$$

$$|\sum_{n=N+1}^{N+P} a_n| \leq \sum_{n=N+1}^{N+P} |a_n| < \varepsilon$$

□

DEFINICE 3.9 (NEABSOLUTNÍ KONVERGENCE KOMPLEXNÍ ŘADY.) Pokud řada konverguje, ale ne aboslutně, konverguje neabsolutně.

VĚTA 3.8 (LEIBNIZOVO KRITÉRIUM.) Nechť $\{b_n\}$ je monotónní reálná posloupnost konvergující do nuly. Potom $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ konverguje.

DŮKAZ VĚTY 3.8 $b_n \in \mathbb{R}$, BÚNO b_n nerostoucí ($b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq 0$).

$$S_{N+1} = S_N + (-1)^{N+1} b_{N+1}$$

$$S_{N+2} = S_N + (-1)^{N+1} b_{N+1} + (-1)^{N+2} b_{N+2} = S_N + (-1)^{N+1} \underbrace{[b_{N+1} - b_{N+2}]}_{\geq 0}$$

S_{2N} je nerostoucí, S_{2N+1} je neklesající. Tedy

$$0 \geq S_{2N} \geq S_{2N+1} \geq S_1$$

$$S_{2N+1} - S_{2N} = (-1)^{2N+1} b_{2N+1} \leq 0$$

$\{S_{2N}\}$, $\{S_{2N+1}\}$ ... monotónní, omezené $\Rightarrow$ mají konečnou limitu
$|S_{2N} - S_{2N+1}| = |b_N| \to 0$ ... obě limity jsou stejné $\Rightarrow$ konverguje

□

PŘÍKLAD 3.5

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ konverguje dle Leibnize
absolutní konvergence $\sum \frac{1}{n^2}$ konverguje

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konverguje neabsolutně

3. !!! $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$:

$(-1)^n \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n}}_{\to 0}$ není monotónní $\Rightarrow$ nekonverguje.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (-1)^{n+1}}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+(-1)^n)} = \underbrace{-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+(-1)^n)}}_{\text{diverguje do } -\infty}$$

$$\Rightarrow \text{diverguje}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+(-1)^n)} \sim \frac{1}{n},$$

členy musí být ≥ 0 (pro větu 3.3)

Lemma 3.6 (Abelovo sumační lemma.) Nechť $a_n \in \mathbb{C}$ tak, že

$$|\sum_{n=1}^{N} a_n| \leq K(\text{nezávisí na } N).$$

Nechť $b_n \in \mathbb{R}$ je nerostoucí, nezáporná posloupnost. Potom

$$|\sum_{n=1}^{N} a_n \cdot b_n| \leq K \cdot b_1 \; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Důkaz lemmatu 3.6

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n; S_N \leq K, \; S_0 = 0$$

$$|\sum_{n=1}^{N} a_n \cdot b_n| = |\sum_{n=1}^{N} \underbrace{(S_M - S_{n-1})}_{a_n} \cdot b_n| =$$

$$= |\sum_{n=1}^{N} S_N b_n - \sum_{n=0}^{N-1} S_N b_{n+1}| = |\sum_{n=1}^{N-1} S_N (b_n - b_{n-1}) + \underbrace{S_0 b_1}_{0} + S_N b_N| \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{N-1} |S_N| \cdot |b_n - n_{n-1}| + |S_N| \cdot |b_n| \leq K \cdot \left[\sum_{n=1}^{N-1} (b_n - b_{n+1}) + b_n \right] \leq$$

$$\leq K \cdot b_1$$

□

VĚTA 3.9 (<u>DIRECHLETOVO KRITÉRIUM.</u>) Nechť $a_n \in \mathbb{C}$, řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ má omezené částečné součty, řada $b_n \to 0$ ($b_n \in \mathbb{R}$) a je monotónní. Pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \text{ konverguje.}$$

DŮKAZ VĚTY 3.9

$$\left|\sum_{n=1}^{N} a_n\right| \leq M(\text{nezávislé na } N)$$

$$\left|\sum_{n=K}^{L} a_n\right| = \left|\sum_{n=1}^{L} a_n - \sum_{n=1}^{K-1}\right| \leq M + M = 2M$$

$b_n \to 0$ a monotónní:

- a) $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq 0$
- b) $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq 0$

BÚNO a):

$$\exists n_0 \in N \ \forall n > n_0 : b_n \frac{\varepsilon}{2M},$$

ε libovolné, zvolené pevně.

Nechť $N \geq n_0$, $P \in \mathbb{N}$

$$\underbrace{\left|\sum_{n=N+1}^{N+P} a_n b_n\right| \underbrace{\leq}_{\text{Abelovo lemma}} b_{N+1} \cdot 2M \leq 2M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon}_{\text{B-C podmínka} \Rightarrow \text{konverguje}}$$

případ b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_n b_n = -\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n(-b_n)}_{\text{konverguje dle a)}} \Rightarrow$ konverguje.

□

POZNÁMKA 3.11 Direchletovo kritérium je zobecněné Leibnizovo kritérium.
$\sum(-1)^n b_n$, kde $b_n \to 0$ monotónně.
$\sum(-1)^n \ldots$ omezené částečné součty.

LEMMA 3.7 (<u>OMEZENÉ ČÁSTEČNÉ SOUČTY.</u>)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx), \ x \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx), \ \ x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathcal{Z}\} \ (*)$$

DŮKAZ LEMMATU 3.7

$$e^{-iy} = \cos y + i \sin y \ \forall y \in \mathbb{C}$$

$$\cos y = \frac{1}{2}\left(e^{iy} + e^{-iy}\right)$$

$$\sin y = \frac{1}{2i}\left(e^{iy} - e^{-iy}\right)$$

$$\left[e^{ix}\right]^n = e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx)$$

$$(*) \Leftrightarrow e^{ix} \neq 1$$

$$\sum_{n=0}^{N} \left[e^{ix}\right]^n = \frac{e^{ix(N+1)} - 1}{e^{ix} - 1} = \frac{\frac{1}{2i}(e^{\frac{ix(N+1)}{2}} - e^{-\frac{ix(N+1)}{2}})2ie^{\frac{ix(N+1)}{2}}}{\underbrace{\frac{1}{2i}(e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}})}_{\sin\frac{x}{2}} 2ie^{\frac{ix}{2}}} =$$

$$= \frac{\sin\left[\left(\frac{N+1}{2}\right)x\right]}{\sin\frac{x}{2}} \cdot e^{iNx} = \cos(Nx) + i\sin(Nx) = \sum_{n=0}^{N}\cos(nx) = \frac{\sin\left[\left(\frac{N+1}{2}\right)x\right]}{\sin\frac{x}{2}} \cdot \cos(Nx)$$

platí, i když zaměním cos $\to$ sin, ne naopak.

$$\left|\sum \cos(nx)\right| \leq \frac{1}{|\sin(\frac{x}{2})|}$$

$x = 2k\pi$:

$\sin(nx) = 0 \ \forall n > 0 \ldots$ má omezené součty

$\cos(nx) = 1 \ \forall n > 0 \ldots$ nemá omezené součty

$\square$

PŘÍKLAD 3.6 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ konverguje: $\sum \sin n$, $\frac{1}{n} \to 0$ monotónně $\overset{\text{lemma 3.7}}{\Rightarrow}$ konverguje

konverguje neabsolutně:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n} = +\infty \ (1); \text{ důkaz následuje:}$$

$$M := \cup_{k\in\mathcal{Z}} \left(k\pi - \frac{1}{2}, k\pi + \frac{1}{2}\right)$$

$$V := \mathbb{R} \setminus M$$

$$x \in M \Rightarrow |\sin x| < \sin\frac{1}{2} = \Delta$$

$$x \in V \Rightarrow |\sin x| \geq \Delta$$

Klíčové pozorování: alespoň jedno z čísel $2n, 2n+1$ bude ve V.

$$2n \in V \ \dots OK$$

$$2n \notin V \Rightarrow 2n \in M \Rightarrow 2n+1 \in V$$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{|\sin(2n)|}{2n} + \frac{|\sin(2n+1)|}{2n+1} \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{\Delta}{2n+1} \geq \Delta \cdot \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2n+1} \dots$$

... neabsolutně konverguje.

(1) viz výše.

Věta 3.10 (<u>Abelovo kritérium.</u>) Nechť $a_n \in \mathbb{C}$, $c_n \in \mathbb{R}$.

1. Pokud $\sum a_n$ konverguje, $\{c_n\}$ je omezená monotónní, potom $\sum a_n c_n$ konverguje.
2. Pokud $\{c_n\}$ je monotónní a $c_n \to c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot c_n$ konverguje.

Důkaz věty 3.10

1. $\{c_n\}$ omezená, monotónní, $\exists c \in \mathbb{R}$ $c_n \to c$

$$\sum a_n \cdot c_n = \sum a_n \underbrace{(c_n - c)}_{\to 0,\ \text{monotónní}} + \underbrace{\sum a_n \cdot c}_{\text{konverguje}}$$

$\sum a_n$ má omezené částečné součty (neboť konverguje dle Direchletova kritéria)

$\Rightarrow$ konverguje

2. „$\Rightarrow$“ $\{c_n\}$ omezená, ukázáno v bodě 1.

„$\Leftarrow$“ $c_n \to c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ... $\frac{1}{c_n} \to \frac{1}{c} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\{\frac{1}{c_n}\}$ je monotónní, omezená

$\sum a_n \cdot c_n$ konverguje $\Rightarrow \sum a_n c_n \cdot \frac{1}{c_n}$ konverguje

$\sum a_n$ konverguje.

□

Příklad 3.7 $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^n}{n} \operatorname{arctg} n}_{\text{monotónní, limita } \frac{\pi}{2}}$ konverguje $\Leftrightarrow \sum \frac{(-1)^n}{n}$ konverguje dle Leibniye

3.3 Přerovnávání řad

DEFINICE 3.10 (PŘEROVNÁNÍ ŘADY.) Řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ se nazývá PŘEROVNÁNÍ ŘADY $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, pokud existuje zobrazení $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vzájemně jednoznačné. Pak $b_n = a_{\varphi(n)}$.

LEMMA 3.8 Součet řady s nezápornými členy se přerovnáním nemění.

DŮKAZ LEMMATU 3.8 $A_n \geq 0$, $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, obecně $S \in [0; +\infty) \cup \{+\infty\}$

b_n je přerovnávání a_n. $S = \lim_{N\to\infty} s_n = \sup\{S_N : N \in \mathbb{N}\}$, s_n … neklesající
zvolme $\tilde{S} < S$: $\exists N \in \mathbb{N}$: $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n > \tilde{S}$
$b_n = a_{\varphi(n)}$ $M := \max\{\varphi^{-1}(1), \varphi^{-1}(2), \dots, \varphi^{-1}(N)\}$

$$\sum_{n=1}^{M} b_n \geq \tilde{S} \text{ a } \tilde{S} < \sum_{n=1}^{N} a_n$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \geq \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, opačná nerovnost analogicky (přerovnání je symetrické)

$\square$

DEFINICE 3.11 Pro $a \in \mathbb{R}$ označíme:

$a^+ := \max\{0, a\}$ … kladná část

$a^- := \max\{0, -a\}$ … záporná část

PŘÍKLAD 3.8

$$(-\pi)^+ = 0$$
$$(-\pi)^- = \pi$$

VĚTA 3.11 Nechť $a_n \in \mathbb{C}$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je přerovnání této řady. Potom $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje absolutně a má stejný součet.

DŮKAZ VĚTY 3.11 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje
$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \underbrace{=}_{\text{Lemma 3.8}} \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje absolutně
zbývá: $\sum a_n = \sum b_n$
<u>1. krok:</u> $a_n \in \mathbb{R}$: $0 \leq a_n^+, a_n^- \leq |a_n|$ $(*)$
$a_n = a_n^+ - a_n^-$
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ věta 3.1
$(*) \Rightarrow \sum a_n^+$ a $\sum a_n^-$ konvergují
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- \underbrace{=}_{\text{Lemma 3.8}} \sum_{n=1}^{\infty} b_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} b_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$
<u>2. krok</u>: $a_n \in \mathbb{C}$, $a_n = \text{Re } a_n + i \text{ Im } a_n$ $0 \leq |\text{Re } a_n|, |\text{Im } a_n| \leq |a_n|$
$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \text{Re } a_n, \sum_{n=1}^{\infty} \text{Im } a_n$ konverguje absolutně $\sum a_n = \sum \text{Re } a_n + i \sum \text{Im } a_n \underbrace{=}_{\text{1. krok}} \sum \text{Re } b_n +$
$i \sum \text{Im } b_n = \sum b_n$

□

POZNÁMKA 3.12 Neabsolutně konvergentní řadu lze přerovnat tak, aby její součet byl libovolné $S \in \mathbb{R}^*$.

POZNÁMKA 3.13 TVRZENÍ: $\sum a_n$ konverguje neabsolutně

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = +\infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = +\infty$$

DŮKAZ TVRZENÍ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-, \text{ má-li RHS smysl.}$$

$$(|a_n| = |a_n^+| + |a_n^-|)$$

$\sum a_n^+$	$\sum a_n^-$		$\sum a_n$
$\in \mathbb{R}$	$\in \mathbb{R}$	$\Rightarrow$	konverguje absolutně
$= +\infty$	$\in \mathbb{R}$	$\Rightarrow$	$= +\infty$
$\in \mathbb{R}$	$= +\infty$	$\Rightarrow$	$= -\infty$
$= +\infty$	$= +\infty$	$\Leftarrow$	konverguje neabsolutně

POZNÁMKA 3.14 a_n

- kladné; $\sum = +\infty$
- záporné; $\sum = -\infty$
- samé nuly

1. beru kladné, až do doby, než $S_N > S$
2. beru záporné, až do doby, než $S_N < S$
3. opakuji 1) a 2), občas přihodím nulu
   ...
   $S_N > S$ nastane: (protože $\sum a_n^+ = +\infty$)
   $S_N \to S$: $\sum a_n$ konverguje $\Rightarrow a_n \to 0$
   $\varepsilon > 0$ dáno: nejvýše konečně $|a_n| \leq \varepsilon$. Vypotřebuji po konečně mnoha krocích algoritmu.

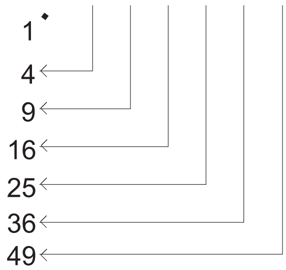
VĚTA 3.12 (CAUCHYŮV SOUČET ŘAD.) Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergují absolutně, $a_n, b_n \in \mathbb{C}$. Označme $c_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$ a řada vlevo konverguje absolutně.

Důkaz věty 3.12

	a_0	a_1	a_2
b_0	a_0b_0	a_1b_0	$\dots$
b_1	a_0b_1	a_1b_1	$\dots$
b_2	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

$c_0 = a_0b_0$
$c_1 = a_0b_1 + a_1b_0$
$c_1 = a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0$
uspořádám vnitřek tabulky do řady:

$\sum_{n=1}^{\infty} d_n;$
$d_1 = a_0b_0$
$d_2 = a_1b_0$
$d_3 = a_1b_1$
$d_4 = a_0b_1$
$d_5 = a_2b_0$
$\vdots$
$d_9 = a_0b_2$



$$\sum_{n=1}^{N^2} d_n = \left(\sum_{n=0}^{N-1} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{N-1} b_n\right)$$

$$\sum_{n=1}^{N^2} |d_n| = \left[\sum_{n=0}^{N-1} |a_n|\right] \cdot \left[\sum_{n=0}^{N-1} |b_n|\right] \leq$$

$$\leq \left[\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\right] \cdot \left[\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|\right]$$

$$= K < +\infty$$

$$\sum_{n=1}^{N} |d_n| \leq \sum_{n=1}^{N^2} |d_n| \leq K < +\infty$$

$$N \to +\infty$$

$$\sum_{n=1}^{N^2} d_n = \left(\sum_{n=0}^{N-1} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{N-1} a_b\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_b\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n, \text{ stejná řada sečtená v jiném pořadí}$$

vezmu γ_n :
$\gamma_1 = a_0b_0$
$\gamma_2 = a_0b_1$
$\gamma_3 = a_1b_0$
$\gamma_4 = a_0b_2$
$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n = \sum_{n=1}^{\infty} d_n$
$(\clubsuit \star \clubsuit)$ $\sum_{n=0}^{n=N} c_n = \sum_{n=1}^{n=\frac{(N+1)\cdot(N+2)}{2}} \gamma_n$
$N \to +\infty$

$(\clubsuit \star \clubsuit) : \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n = \sum_{n=1}^{\infty} d_n$
$\sum_{n=0}^{N} |c_n| \leq \sum_{n=1}^{n=\frac{1}{2}(N+1)(N+2)} |\gamma_n| \leq K < +\infty \ (*\ )$
$|c_n| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k| \cdot |b_{n-k}|$
$(*)$ ... nezávisí na N, $\sum \gamma_n$ konverguje absolutně.

□

Příklad 3.9 Definuji $E(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{C}$ ... konverguje absolutně
$x = 0 : E(x) = 1 + 0 + 0 + \ldots = 1$ $(x^0 := 1\ \forall x \in \mathbb{C})$
$x \neq 0 : a_n = \frac{x^n}{n!} \ldots \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \ldots$ konverguje absolutně
$= \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \cdot \left|\frac{n!}{x^n}\right| = \frac{|x|}{n+1} \to 0$ D'Allembert
Platí:

$$E(x) \cdot E(y) = E(x+y)\ \forall x, y \in \mathbb{C}$$

Použijeme Cauchyho součin řad:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n,\ \ c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}$$

$$a_n = \frac{x^n}{n!}$$

$$b_n = \frac{y^n}{n!}$$

$$c_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} \cdot \frac{y^{n-j}}{(n-j)!} = \frac{1}{n!} \underbrace{\sum_{n=0}^{n} \binom{n}{j} x^j \cdot y^{n-j}}_{(x+y)^n \ldots \text{ binomická věta}} = \frac{1}{n!}(x+y)^n$$

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x+y)^n = E(x+y)$$

Kapitola 4

Mocninné řady

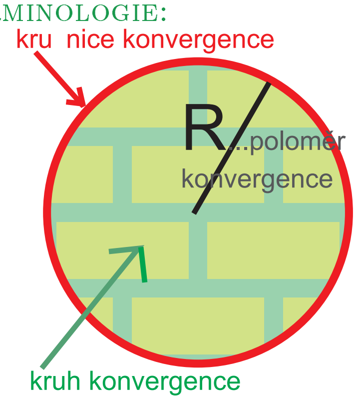
Pojmy v této kapitole: Mocninná řada, kružnice konvergence, poloměr konvergence, kruh konvergence,kruhové a prstencové okolí v $\mathbb{C}$, spojitost v $\mathbb{C}$, derivace v $\mathbb{C}$, analytická funkce. Věta o podílovém kritériu na určení poloměru konvergence, odmocninové kritérium, derivování člen po členu.

Definice 4.1 (Mocninná řada.) Nechť $a_n, z_0 \in \mathbb{C}$. Pak symbol

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z - z_n)^n \tag{1}$$

nazýváme mocninnou řadou o středu z_0.
$a_n \ldots$ koeficienty
$z \ldots$ proměnná
$z_0 \ldots$ střed

Úmluva značení 4.1 . Terminologie:



Věta 4.1 K řadě (1) existuje právě jedno číslo $R \in [0; +\infty)$ tak, že

1. pro $z \in \mathbb{C}$; $|z - z_0| < R$ řada (1) konverguje absolutně.
2. pro $z \in \mathbb{C}$; $|z - z_0| > R$ řada (1) diverguje.

Důkaz věty 4.1 Důkaz jednoznačnosti. Existuje nejvýše 1 číslo R splňující 1), 2).
Sporem: Nechť $R < \hat{R}$, obě splňují 1), 2). Najdu $z \in \mathbb{C}$ tak, že $R < |z - z_0| < \hat{R}$. Potom

(1) diverguje dle 2) pro R & (1) konverguje absolutně dle 1) pro $\hat{R} \Rightarrow$ spor.
Důkaz existence. Položme $R := \sup M$, $M := \{|\zeta - z_0| : (1) \text{ konverguje v } z = \zeta\}$
$R \dots$ splňuje 2): $|z - z_0| > R$ & (1) konverguje $\Rightarrow |z - z_0| \in M \Rightarrow R \geq |z - z_0|$. SPOR.
$R \dots$ splňuje 1): nechť $z \in \mathbb{C}$ dáno: $|z - z_0| < R \Rightarrow$ (1) konverguje absolutně. (ii). vlastnost suprema: $\exists x \in M$ tak, že $|z - z_0| < x$, ale x je tvaru $|\zeta - z_0|$ tak, že $\sum a_n(\zeta - z_0)$ konverguje $\Rightarrow |a_n(\zeta - z_0)^n| \to 0 \Rightarrow \exists c > 0 : |a_n| \cdot |\zeta - z_0|^n \leq \mathbb{C}\ \forall n \in \mathbb{N}$

$$|a_n(z - z_0)^n| = \left| \underbrace{a_n(\zeta - z_0)^n}_{C} \cdot \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^n} \right| \leq C \cdot q^n$$

$$q = \frac{|z - z_0|}{|\zeta - z_0|} < 1$$

□

PŘÍKLAD 4.1
1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \dots$ konverguje absolutně $\forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow R = +\infty$, kruh konvergence $= \mathbb{C}$.
2. $\sum_{n=0}^{\infty} n^n \cdot z^n$:
   $z \to 0$: $\sum = 1 + 0 + 0 + \dots$ konverguje $(0^0 = 1)$
   $z \to x > 0$: $(n \cdot x)^n \to +\infty \dots$ diverguje, $R = 0 \dots$ kruh konvergence je prázdná množina.
3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n+1} \dots z = -1 \dots \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \dots$ konverguje neabsolutně $\Rightarrow -1 \in$ kružnice konvergence, $R = 1$.

VĚTA 4.2 (PODÍLOVÉ KRITÉRIUM - NA URČENÍ R.) Nechť řada (1) je dána, nechť $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \to \rho$. Potom poloměr konvergence řady (1) se vypočte jako $R = \frac{1}{\rho}$, kdy výjimečně klademe $\frac{1}{0} = +\infty$.

DŮKAZ VĚTY 4.2 Označme $b_n := |a_n(z - z_0)^0| \dots$ (1) konverguje absolutně $\Leftrightarrow \sum b_n$ konverguje.
BÚNO: $z \neq z_0$ (v bodě $z = z_0$ konverguje absolutně vždy):

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{|a_{n+1}| \cdot |z - z_0|^{n+1}}{|a_n| \cdot |z - z_0|^n} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot |z - z_0| \to \rho \cdot |z - z_0|$$

Diskuze:

(a) $\rho = 0 : \dots$ (1) konverguje absolutně $\forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow R = +\infty = \frac{1}{\rho}$

(b) $\rho = +\infty : \dots$ (1) nekonverguje absolutně $z \neq z_0 \Rightarrow R = 0 = \frac{1}{\rho}$

(c) $\rho \in (0; +\infty) : \dots\ \rho|z - z_0| < 1 \Leftrightarrow |z - z_0| < \frac{1}{\rho} \Rightarrow$ (1) konverguje absolutně

$\rho|z - z_0| > 1 \Leftrightarrow |z - z_0| > \frac{1}{\rho} \Rightarrow$ (1) nekonverguje absolutně

$\Rightarrow R = \frac{1}{\rho}$

□

VĚTA 4.3 (<u>ODMOCNINOVÉ KRITÉRIUM.</u>) Nechť řada (1) je dána, nechť $\sqrt[n]{|a_n|} \to \rho$. Potom poloměr konvergence řady (1) se vypočte jako $R = \frac{1}{\rho}$, kde $\frac{1}{0} := +\infty$.

DŮKAZ VĚTY 4.3 Položme $b_n := |a_n(z - z_0)^n|$, (1) ... konverguje absolutně $\Leftrightarrow \sum b_n$ konverguje .

Odmocninové kritérium:

$$\sqrt[n]{b_n} = \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |z - z_0| \to \rho \cdot |z - z_0|$$

Úplně stejná diskuse jako u dk. věty 4.2 .

$\square$

PŘÍKLAD 4.2

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2} \ldots \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1}{(n+1)^2} \cdot n^2 \to 1 \Rightarrow R = 1$

   ??? $|z| = 1$, pak $\left|\frac{z^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$ ... řada konverguje absolutně na kružnici konvergence.

2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{n}_{a_n} \cdot z^n \ldots \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{n} \to 1 \ldots R = 1$??? $|z| = 1$, pak $|n \cdot z^n| = n \to +\infty$

   ... řada diverguje na kružnici konvergence.

DEFINICE 4.2 (<u>POJMY V $\mathbb{C}$ - OKOLÍ.</u>)

<u>KRUHOVÉ OKOLÍ</u>: $\mathcal{U}(z_0, \varepsilon) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$

<u>PRSTENCOVÉ OKOLÍ</u>: $\mathcal{P}(z_0, \varepsilon) := \{\mathcal{U}(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}\}$

Speciálně:

$\mathcal{U}(z_0, +\infty) = \mathbb{C}$

$\mathcal{P}(z_0, +\infty) = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$

DEFINICE 4.3 (<u>POJMY V $\mathbb{C}$ - SPOJITOST.</u>) Funkce $f(z) : \mathcal{U}(z_0) \to \mathbb{C}$ se nazve <u>SPOJITÁ</u> v z_0 dle komplexní proměnné, jestliže platí $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : f(\mathcal{U}(z_0, \delta)) \subset \mathcal{U}(f(z_0), \varepsilon)$, neboli

$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$

DEFINICE 4.4 (<u>POJMY V $\mathbb{C}$ - DERIVACE.</u>) Číslo $A \in \mathbb{C}$ se nazve derivací $f(z)$ v bodě z_0 dle komplexní proměnné, pokud $\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = A$, nebo také $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ $\forall h \in \mathbb{C}\ 0 < |h| < \delta \Rightarrow \left|\frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} - A\right| < \varepsilon$

VĚTA 4.4 (DERIVOVÁNÍ ČLEN PO ČLENU.) Nechť řada (1) má poloměr $R > 0$. Potom i řada

$$\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(z-z_0)^{n-1} \qquad (2)$$

má též poloměr konvergence R a označíme-li $F(z)$, resp. $f(z)$ součty řad (1), resp. (2) platí $F'(z) = f(z)$ všude na $\mathcal{U}(z_0, R)$

DŮKAZ VĚTY 4.4 Nechť $\hat{R}$ je poloměr konvergence (2), R je poloměr konvergence (1). BÚNO $z_0 = 0$. Označme $c_n := |a_n z^n|$, $d_n := |na_n z^{n-1}|$

poloměr konvergence $\Rightarrow$ největší kruh s absolutní konvergencí

$z \in \mathcal{U}(z_0, R) \Rightarrow$ (dk. věty 4.1): $|c_n| \leq q^n$, $q \in (0; 1)$.

$d_n := \left|a_n \cdot z^n \cdot \frac{n}{z}\right| \leq C \cdot q^n \cdot \frac{n}{|z|}$ ... konvergentní řada $\Rightarrow \underline{\underline{R \geq \hat{R}}}$

$F(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots$

$f(z) = \qquad a_1 + a_2 z + a_3 z^2 + \ldots + na_n z^{n-1}$

$F(z+h) = a_0 + a_1(z+h) + a_2(z+h)^2 + a_3(z+h)^3 + \ldots$

$h \Rightarrow 0$: $\frac{F(h+z)-F(z)}{h} - f(z) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n \left[\frac{(z+h)^n - z^n}{h} - nz^{n-1}\right] =$

$(z+h)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} z^j h^{n-j} = \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n}{j} z^j h^{n-j} + nz^{n-1}h + z^n$

$= \sum_{n=2}^{+\infty} a_n \sum_{j=0}^{n-2} \frac{1}{h} \binom{n}{j} z^j h^{n-j} \geq 2$ vždy

$= \sum_{n=2}^{+\infty} a_n \cdot h \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n}{j} z^j h^{n-2-j}$

$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!} \leq n(n-1) \binom{n-2}{j}$

$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| \leq |h| \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)|a_n| \underbrace{\sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} |z|^j |h|^{(n-2)-j}}_{(|z|+|h|)^{n-2}}$

$= |h| \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)|a_n|(|z|+|h|)^{n-2}$ $(*)$

$\delta > 0$ zvolené pevně: $|z| + \delta < R$

$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)|a_n|(|z|+\delta)^{n-2} = A < +\infty$

(3) derivace (2), konverguje absolutně v bodě $|z| + \delta$

$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n(z)^{n-2} \qquad (3)$

$(*) \leq |h| \cdot A \to 0$

platí, že f je derivací F.

$\square$

Poznámka 4.1 Důsledky:

Označme $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ v $\mathcal{U}(z_0, R)$, kde R je poloměr konvergence. Potom:

1. $F(z)$ je spojitá na $\mathcal{U}(z_0, R)$ (tj. má vlastní derivaci!!!)
2. $F^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n(z-z_0)^{n-k}$ na $\mathcal{U}(z_0, R)$, $\forall k \in \mathcal{Z}$;

   prvních $k-1$ členů derivací vypadne
3. $F^{(k)}(z_0) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots 1 \cdot a_n$; $a_n = \frac{F^{(n)}(z_0)}{n!}$
4. označím-li $\varphi(z) = C + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1}$, $C \in \mathbb{C} \dots$ (4)

   $\varphi(z)$ má poloměr konvergence R

   $\varphi'(z) = F(z)$ na $\mathcal{U}(z_0, R)$

Příklad 4.3

1. $E(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$: $E'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nz^{n-1}}{n!(n-1)!} = E(z)$

   Definujeme:

$$C(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \dots \text{konverguje absolutně } \forall z \in \mathbb{C}$$

$$S(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \dots \text{konverguje absolutně } \forall z \in \mathbb{C}$$

$$S'(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)z^{2n}}{(2n+1)!} = C(z)$$

2. $E(ix) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$, $i^{2n} = (-1)^n$, $i^{2n+1} = (-1)^n \cdot i$

   $= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + i \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = C(x) + iS(x)$

3. $\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$, $|x| < 1$, $x \in \mathbb{C}$ ... mocninná řada, $R = 1$

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{1+x} \text{ na } (-1; 1), \text{ polož } x = 0$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

4. !!!

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{a} x^n \ \forall |x| < 1$$

Definice 4.5 (Analytická funkce.) Funkce $f(x)$ se nazve ANALYTICKÁ v bodě $x_0 \in \mathbb{C}$, pokud $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$ na $\mathcal{U}(z_0, \delta)$, kde řada vpravo má kladný poloměr konvergence.

Příklad 4.4

1. $E(x), C(x), S(x), \ln(1+x)$ jsou analytické v bodě 0.

2. $E(x)$ je analytická v $\mathbb{C}$.

   Dk: zvol $z_0 \in \mathbb{C}$: $E(z) = E(z - z_0 + z_0) = E(z_0 - \sum \frac{(z-z_0)^n}{n!}$ $\forall z \in \mathbb{C}$.

   $f(x)$ je analytická v $x_0 \Rightarrow$ věta 4.4 $\Rightarrow f(x)$ je spojitá na $\mathcal{U}(x_0, \delta)$

   $\forall n \leq 0\ \exists f^{(n)}(x)$ na $\mathcal{U}(x_0, \delta)$

   např. $|x|$ není v bodě 0 analytická (nemá derivaci)

   Existují všechny derivace v $x_0 \Rightarrow f(x)$ je analytická v x_0

   - derivace podle komplexní proměnné $\Rightarrow$ ano
   - derivace podle reálné proměnné $\Rightarrow$ ne

   $$h(x) := \begin{cases} 0; x \leq 0 \\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}; x > 0 \end{cases}$$

   $h_-^{(n)}(0) = 0$

$h'_+(0) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = 0$

$h''_+(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} - \overbrace{0}^{h'(0)}}{x} = 0$

$h^{(n)} = 0\ \forall n \geq 0$

spor: $h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0 \Rightarrow$ věta 4.4 $\Rightarrow a_n = \frac{h^{(n)}(0)}{n!} = 0$

$h(x) = 0$ na $\mathcal{U}(0) \Rightarrow$ SPOR

Kapitola 5

Obyčejné diferenciální rovnice

POJMY V TÉTO KAPITOLE: Obyčejná diferenciální rovnice řádu (ODR) n,lineární diferenciální rovnice, řešení rovnice, prodloužení řešení, vlastní prodloužení, maximální řešení, okolí bodu, Lipschitzovská funkce, autonomní DR, DR se separovanými proměnnými, homogenní DR, Bernoulliova DR, fundamentální systém řešení, nehomogenní DR, množina nehomogenních řešení NH. Věta o převedení $y' = f(x, y)$ na integrální tvar, o lokální existenci řešení, o lokální jednoznačnosti, o tvaru množiny NH, o variaci konstant, o partikulárním řešení ve speciálním případě.

Co je to diferenciální rovnice (DR)? Je to rovnice, v níž neznámá je funkce.
DR obsahuje:

- y ... neznámá funkce, její proměnné
- derivaci y

Řád rovnice: nejvyšší derivace v rovnici

- DR obyčejné: **(ODR)**: $y = y(x)$, derivace jen dle x
- DR parciální: **(PDR)**: $y = y(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, derivace: $\frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots$

DEFINICE 5.1 (ODR.) OBYČEJNOU DIFERENCIÁLNÍ ROVNICÍ ŘÁDU n rozumíme

$$(1) \ldots F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

PŘÍKLAD 5.1 (α) $[y']^3 + \cos(x \cdot y) = \frac{x}{1+y^3}$
(β) $y'' + y = 0$
(γ) $y' = \ln y$
(δ) $\frac{y''}{1+x^2} + \frac{y}{1-x^2} = x + \mathrm{e}^x$

DEFINICE 5.2 (LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE.) Rovnice (1) se nazve LINEÁRNÍ, pokud F je lineární vůči výrazům $y, y', \ldots, y^{(n)}$.

Příklad 5.2 (α) 3. řádu, nelineární
(β) 2. řádu, lineární
(γ) 1. řádu, lineární
(δ) 2. řádu, lineárnívskip 3mm

Definice 5.3 (Řešení rovnice (1).) Nechť $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval. Funkce $y(x) : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ se nazve řešení rovnice (1), pokud jsou splněny podmínky:
a) existují $y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)$ vlastní všude na $\mathcal{I}$.
b) platí: $F\left(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)\right) = 0 \ \forall x \in \mathcal{I}$.
Řešením je dvojice $(y(x), \mathcal{I})$, kde $y(x)$ je funkce a $\mathcal{I}$ je definiční obor.

Příklad 5.3 $y(x) = 1$, $x \in (0,1)$ je řešení (γ)
$\tilde{y}(x) = 1$, $x \in (0,2)$ je jiné řešení (γ) .

Definice 5.4 (Prodloužení řešení rovnice (1).) Řešení $\left(\tilde{y}(x), \tilde{\mathcal{I}}\right)$ rovnice (1) se nazve prodloužení řešení $(y(x), \mathcal{I})$, pokud platí obě podmínky:
a) $\tilde{\mathcal{I}} \supset \mathcal{I}$
b) $\tilde{y}(x) = y(x) \ \forall x \in \mathcal{I}$

Definice 5.5 (Vlastní prodloužení.) Prodloužení se nazve vlastní, pokud $\tilde{\mathcal{I}} \supsetneq \mathcal{I}$.

Definice 5.6 (Maximální řešení.) Řešení se nazve maximální, pokud nemá vlastní prodloužení.

Poznámka 5.1 Řešení je obvykle hodně (více).

Příklad 5.4 (β): maximální řešení ... $\begin{cases} y(x) = 0, \ x \in \mathbb{R} \\ y(x) = 4\sin x + 6\cos x, \ x \in \mathbb{R} \\ y(x) = A \cdot \cos x + B \cdot \sin x, \ x \in \mathbb{R}, \\ \quad A, B \dots \text{ konstanty} \dots \text{obecné řešení} \end{cases}$

Poznámka 5.2 Typicky: $x_0 \in \mathbb{R}$, $Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1} \in \mathbb{R}$ dáno:
$\Rightarrow$ existuje právě 1 řešení rovnice (1) splňující počáteční podmínky:

$$(2) \begin{cases} y(x_0) = Y_0 \\ y'(x_0) = Y_1 \\ y''(x_0) = Y_2 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = Y_{n-1} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ F je rozumná.
Dále uvažujeme rovnice tvaru

$$(3) y' = f(x, y).$$

ODR … 1. řádu, obecně nelineární, vyřešená vůči (nejvyšší) derivaci.
CÍL:

- najít všechna maximální řešení (3)
- zdůvodnit, že jsou všechna
- dle možností nakreslit tato řešení

PROSTŘEDKY:

- věty zaručující existenci řešení
- věty zaručující jednoznačná řešení
- explicitní metody řešení pro speciální tvar $f(x, y)$

POZNÁMKA 5.3
$f = f(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

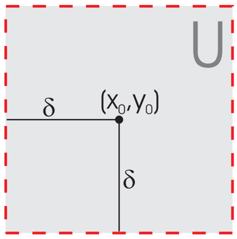
$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{[x, y] : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

$f : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

spojitost f

DEFINICE 5.7 (OKOLÍ BODU.) Okolí bodu $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$: $\delta > 0$

$$\mathcal{U}\left(\underbrace{[x_0, y_0]}_{\text{bod}}, \delta\right) := \underbrace{(x_0 - \delta; x_0 + \delta)}_{\text{interval}} \times (y_0 - \delta; y_0 + \delta)$$



POZNÁMKA 5.4

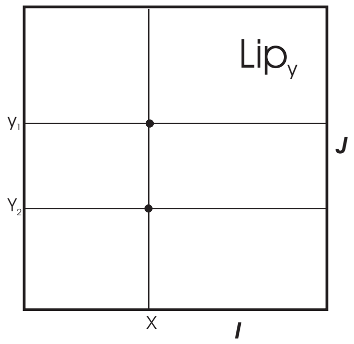
funkce $X \mapsto f(x, y(x))$ je spojitá z $\mathcal{I} \to \mathbb{R} \Leftarrow \begin{cases} y = y(x) : \mathcal{I} \to \mathcal{J} \text{ spojitá} \\ f = f(x, y) : \mathcal{I} \times \mathcal{J} \to \mathbb{R} \text{ spojitá} \end{cases}$

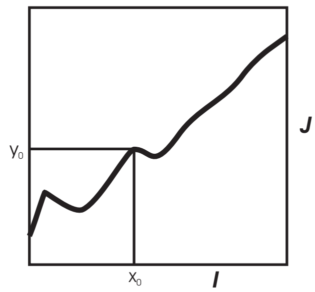
LEMMA 5.1 (PŘEVEDENÍ $y' = f(x, y)$ NA INTEGRÁLNÍ TVAR.) Nechť $f = f(x, y)$ je spojitá v $\mathcal{I} \times \mathcal{J} \subset \mathbb{R}^2$. Nechť $y = y(x)$ je spojitá z $\mathcal{I} \to \mathcal{J}$, nechť $x_0 \in \mathcal{I}$, $y_0 \in \mathcal{J}$. Potom $(y(x), \mathcal{I})$ je řešení rovnice (3) (tj. $y' = f(x, y)$) s počátečními podmínkou $y(x_0) = y_0$, právě když

$$(4) \qquad y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, \mathrm{d}s \ \forall x \in \mathcal{I}.$$

DŮKAZ LEMMATU 5.1

- $\Rightarrow$ Nechť $y(x)$ řeší (3), $y(x_0) = y_0$.
  Máme $y'(s) = f(s, y(s))$, $s \in \mathcal{I}$.





Z předpokladů $y(s)$ je spojitá $\Rightarrow$ $f(s, y(s))$ spojitá (dle předchozí poznámky): chci integrovat $\int_{x_0}^{x}$

$$\int_{x_0}^{x} y'(s) \Rightarrow y(x) - \underbrace{y(x_0)}_{=y_0} = \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\,\mathrm{d}s = y(x) - y_0$$

$\Rightarrow$ platí (4)

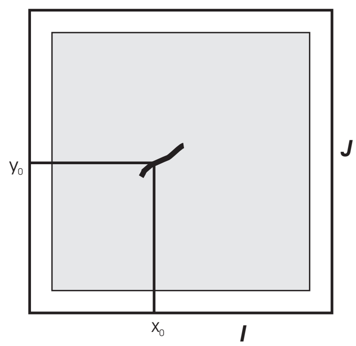
- $\Leftarrow$ Nechť platí (4); $x = x_0 \Rightarrow y(x_0) = y_0$

$$s \mapsto f(s, y(s)) \text{ je spojitá: } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\,\mathrm{d}s = \text{věta 2.4 } = f(x, y(x)) = y'(x).$$

□

Věta 5.1 (O lokální existenci řešení.) Nechť $f = f(x, y)$ je spojitá na okolí bodu $[x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$. Potom existuje lespoň jedno řešení rovnice (3) definované na nějakém $\mathcal{U}(x_0)$ splňující počáteční podmínku $y(x_0) = y_0$.

Důkaz věty 5.1 Vynecháváme.

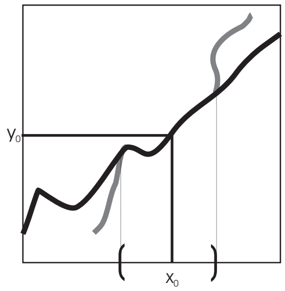


□

Definice 5.8 (Lipschitzovská funkce.) Funkce $f = f(x, y)$ je na množině $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^2$ lipschitzovská vůči proměnné y, pokud $\exists \mathcal{L} > 0$ tak, že $\forall [x, y_1] \in \mathcal{G}$ & $\forall [x, y_2] \in \mathcal{G}$ platí

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq \mathcal{L}|y_1 - y_2|. \qquad (\mathrm{Lip}_y)$$

Věta 5.2 (O lokální jednoznačnosti.) Nechť $f = f(x, y)$ splňuje (Lip_y) na nějakém okolí bodu $[x_0, y_0] \in \mathbb{R}$. Pak pro $\delta > 0$ dost malé existuje nejvýše jedno řešení definované na $\mathcal{U}(x_0, \delta)$ tak, že $y(x_0) = y_0$.



DŮKAZ VĚTY 5.2 Nechť $y, \tilde{y}$ jsou řešení (3) splňující $y(x_0) = \tilde{y}(x_0) = y_0$. Zvolme $\delta > 0$ tak, že $\delta \cdot \mathcal{L} < \frac{1}{2}$. Pak $y = \tilde{y}$ na $\mathcal{U}(x_0, \delta) \cap D(y) \cap D(\tilde{y})$.

Lemma 5.1 : $\begin{array}{l} y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s))\,\mathrm{d}s \\ \tilde{y}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \tilde{y}(s))\,\mathrm{d}s \end{array}$ ... odečtu od sebe

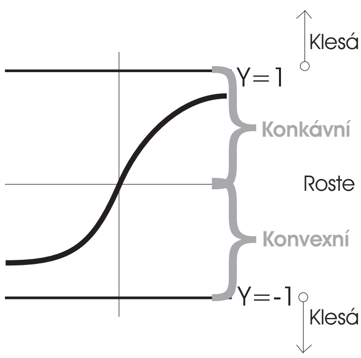
$$y(x) - \tilde{y}(x) = \int_{x_0}^x \underbrace{[f(s, y(s)) - f(s, \tilde{y}(s))]}_{[\mathrm{Lip}_y] \le |y(s) - \tilde{y}(s)| \cdot \mathcal{L}} \mathrm{d}s$$

Označím: $w(x) := |y(x) - \tilde{y}(x)|$. Platí $w(x) \le \mathcal{L} \cdot \int_{x_0}^x w(s)\mathrm{d}s$.
Označme $A = \sup_{x \in [x_0 - \frac{\delta}{2}; x_0 + \frac{\delta}{2}]} w(x)$. Nechť $A > 0$. Pak $\exists x_1 \in [x_0 - \frac{\delta}{2}; x_0 + \frac{\delta}{2}]$ tak, že $A = w(x_1)$. Potom ale $A = w(x_1) \le \mathcal{L} \cdot \int_{x_0}^x w(s)\mathrm{d}s \le \mathcal{L} \cdot A \cdot |x_1 - x_0| \le \mathcal{L} \cdot \frac{\delta}{2} \cdot A \le \frac{A}{4}$
Spor s tím, že $A > 0$. Z toho plyne, že $w(x) \equiv 0$ na $[x_0 - \frac{\delta}{2}; x_0 + \frac{\delta}{2}]$.

□

PŘÍKLAD 5.5 Co vím, aniž bych řešil rovnici?
$y' = f(x, y)$, $x = x_0$ $y'(x_0) = f(x_0, y(x_0))$
Pokud se v bodě dvě funkce dotýkají, mají stejnou derivaci.

PŘÍKLAD 5.6 $y' = 1 - y^2 / \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$
$y'' = (1 - y^2)' = -2 \cdot y' = -2y(1 - y^2)$



POZNÁMKA 5.5

$$(\mathrm{Lip}_y): |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le \mathcal{L}|y_1 - y_2|$$

- je splněna, např. je-li
$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ je omezená na $\mathcal{U}([x_0, y_0])$, což je např. tehdy, je-li $\frac{\partial f}{\partial y}$ spojitá v daném bodě.
x ... pevné: $g(y) = f(x, y)$:

$g'(y) = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) \ldots$ definice parciální derivace
Pokud $|g'(y)| \leq C \ldots$ omezená $g(y_1) - g(y_2) = g'(\eta) \cdot (y_1 - y_2) \ldots$ Lagrange
$|g(y_1) - g(y_2)| \leq C \cdot |y_1 - y_2| \ldots$ [Lip$_y$] s $\mathcal{L} = C$.

5.0 Základní typy rovnic a jak je řešit

5.0.0 $y' = f(x)$

(0) $y' = f(x)$
y řeší (0) v $\mathcal{I} \Leftrightarrow y$ je P.F. k $f(x)$ v $\mathcal{I}$.
PODMÍNKA:$y(x_0) = y_0$ určí řešení jednoznačně.

5.0.1 $y' = f(y)$ - autonomní

(1) $y' = f(y) \ldots$ autonomní
$(y, \mathcal{I})$ řeší (1) $\Rightarrow (\tilde{y}, \tilde{\mathcal{I}})$ je též řešení, kde $\tilde{\mathcal{I}} := \{x - c : x \in \mathcal{I}\}$ & $\tilde{y}(x) := y(x+c)$, c libovolné.

PŘÍKLAD 5.7 $y' = 1 - y^2$

5.0.2 $y' = g(y) \cdot f(x)$ - se separovanými proměnnými

(2) $y' = g(y) \cdot f(x) \ldots$ rovnice se separovanými proměnnými, zahrnuje (0) i (1)
POSTUP ŘEŠENÍ:

1. $g(y_0) = 0 \Rightarrow y(x) \equiv y_0$, $x \in \mathbb{R}$ je řešení
   PŘEDPOKLADY: $\mathcal{I}, \mathcal{J} \ldots$ otevřené intervaly
   $f(x) \in \mathcal{C}(\mathcal{I}) \ldots$ spojitá v $\mathcal{I}$
   $g(y) \in \mathcal{C}(\mathcal{J})$, nenulová $\ldots$ stále stejné znaménko
   Nechť $y(x) : \mathcal{I} \to \mathcal{J}$ je řešení (2).
   $y' = g(y) \cdot f(x) \ldots g \neq c$ $(y' = g(y(x)) \cdot f(x))$
   $\frac{y'}{g(y)} = f(x)$. Nechť $F'(x) = f(x)$ v $\mathcal{I}$ a $G'(y) = \frac{1}{g(y)}$ v $\mathcal{J}$ existují!!!
   Pak $[G(y(x))]' = [F(x)]'$ v $\mathcal{I}$.
   $G(y(x)) = F(x) + c$ v $\mathcal{I}$ pro vhodné $c \in \mathbb{R}$.
   $G(y)$ je prosté.
   $y(x) = G^{-1}(F(x) + c)$ $(*)$
   Postup lze obrátit:
   $y(x)$ dané, $(*)$ je řešení (2)
   POZOR: $y(x) \in \mathcal{J}$, $F(x) + c \in G(\mathcal{J})$

PŘÍKLAD 5.8 $y' = 2\sqrt{|y|}$
a) $y \equiv 0$ je řešení

b) $\mathcal{J} := (-\infty, 0)$ $y(x) : \mathcal{I} \to (-\infty, 0)$ ... $y' = 2\sqrt{-y}$
$\mathcal{J} := (0; +\infty)$
$\frac{y'}{2\sqrt{-y}} = 1 \qquad y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$
$\frac{\mathrm{d}y}{2\sqrt{-y}} = \mathrm{d}x / \int$
$-\sqrt{-y} = x + c$, $x \in (-\infty, -c)$
$\sqrt{-y} = -(x + c)$
$-y = (x + c)^2$
$y = -(x + c)^2$

$$y(x) := \begin{cases} -(x+c)^2, x < -c \\ 0, x \geq -c \end{cases}$$

řeší rovnici v $\mathbb{R}$. Rovnice splněna v $\mathbb{R} \setminus \{-c\}$. Rovnice platí v $x = -c$; x ... bod nalepení

$$\tilde{y}(x) := \begin{cases} -(x+c)^2, x < -c \\ 0, x \geq -c \end{cases}$$

$\tilde{y}(0) = 2\sqrt{|\tilde{y}(0)|}$ ... D.CV.
D.CV.: $y(x) : \mathcal{I} \to (0; +\infty) \Rightarrow y(x) = (x + c)^2$, $x > -c$

Maximální řešení

$\frac{\partial}{\partial y}[2\sqrt{|y|}] = \frac{1}{\sqrt{|y|}} \cdot \operatorname{sgn}(y)$ pro $y \neq 0$ ... spojité ve všech bodech $[x_0, y_0]$, kde $y_0 \neq 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$
Jakmile se řešení odlepí od osy, je určeno jednoznačně.
najdu: $c \in \mathbb{R}$, aby $y_0 = (x_0 + c)^2$ a $y = (x + c)^2$

5.0.3 $y' + a(x)y = b(x)$ - obecná lineární 1. řádu

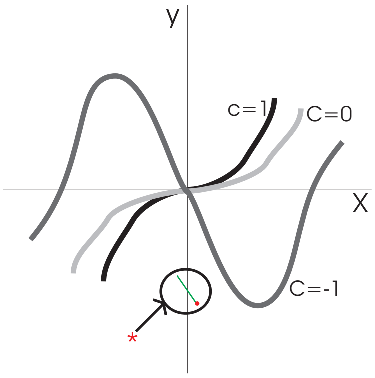
(3) $y' + a(x)y = b(x)$ ... obecná lineární 1. řádu, řešená vůči derivaci
POSTUP ŘEŠENÍ:

1. najdeme $A(x) = \int a(x)\mathrm{d}x$
2. násob (3) funkcí $\exp(A(x))$ ... integrační faktor
   $y' \exp(A) + y \cdot a \cdot \exp(A) = b \cdot \exp(A)$
   $(y \exp(A))' = b \exp(A)$
   $y \exp(A) = \int b \exp(A)\mathrm{d}x + c$
   $y = \exp(-A) \cdot \int b \cdot \exp(A)\mathrm{d}x + c$

   PŘÍKLAD 5.9 $xy' - y = 2x^3 / \cdot \frac{1}{x^2} \begin{cases} (0; +\infty) \\ (-\infty; 0) \end{cases}$

   $\frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = 2x$

$\left(\frac{y}{x}\right)' = 2x$
$\frac{y}{x} = x^2 + c$
$y = x^3 + cx$; $c \in \mathbb{R}$ ... Platí pro $x \neq 0$
v bodě $x = 0$: $y(0) = 0$ ... rovnice platí.



Převeďme do tvaru (3):

$$y' = \frac{2x^3 + y}{c}$$

není spojitá v žádném bodě $[0, y]$ $\Rightarrow$ proto všechna řešení prochází bodem $[0, 0]$ $\Rightarrow$ nejednoznačnost v $[0, 0]$
Nechť $(*)$ (viz obrázek) je jiné řešení. Paktoto řešení existuje i v místě, kde už předtím bylo jednoznačné: v bodech, kde $x \neq 0$ je $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x^3+y}{x}\right)$ spojitá

5.0.4 $y' = f(x, y)$ - homogenní

(4) rovnice homogenní: $y' = f(x, y)$, kde $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$
Např.: $x^4 y' = y(x^3 + y^3)$
$y' = \frac{y \cdot x^3 + y^4}{x^4}$
POSTUP ŘEŠENÍ: substitucí:
$y(x) = x \cdot z(x)$, kde $z(x)$ je nová neznámá funkce; POZOR na $x = 0$!!!
$y' = z + x \cdot z' = f(x, xz) = f(1, z)$
$xz' = f(1, z) - z$ ... separovaná rovnice
PŘÍKLAD 5.10 $y^4 \cdot y' = y(x^3 + y^3)/y = x \cdot z$
$x^4(z + xz') = xz(x^3 + x^3 z^3)$
$z + xz' = z(1 + z^3)$
$xz' = z^4$ ... $z \equiv 0$ je řešení
$\Rightarrow y \equiv 0$ je řešení
a) hledáme: $z > 0$; $z(x) : \mathcal{I} \to (0; +\infty)$, $0 \notin \mathcal{I}$
$\frac{z'}{z^4} = \frac{1}{x}$
$-\frac{1}{3} z^{-3} = \ln|x| + c : \ln|x| + c < 0 \Rightarrow \ln|x| < -c \Rightarrow |x| < \exp(-c)$
$z^{-3} = -3(\ln|x| + c)$
$z = \frac{-1}{\sqrt[3]{3(\ln|x|+c)}}$, $x \in (-\mathrm{e}^{-c}; 0)$, $x \in (0; \mathrm{e}^{-c})$

$$\tilde{y}(x) := \begin{cases} \frac{-x}{\sqrt[3]{3(c_1+\ln|x|)}}, x \in (-\mathrm{e}^{-c_1}; 0) \\ 0, x = 0 \\ \frac{-x}{\sqrt[3]{3(c_2+\ln|x|)}}, x \in (0; \mathrm{e}^{-c_2}) \end{cases}$$

... v nule mají stejnou derivaci.

5.0.5 $y' + a(x)y = b(x)y^\alpha$ - Bernoulliova

(5) Bernoulliova rovnice: $y' + a(x)y = b(x)y^\alpha$, $\alpha \neq 0; 1$ (jinak lineární rovnice)
a) $y \equiv 0$ je řešení v $\mathbb{R}$
b) $z = y^{1-\alpha}$, $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha} \cdot y'$; násobíme $(1-\alpha) \cdot y^{-\alpha}$
$(1-\alpha) \cdot y^{-\alpha} \cdot y' + (1-\alpha) \cdot y^{-\alpha} \cdot a(x) = (1-\alpha) \cdot b(x)$
$z' + (1-\alpha)a(x)z = (1-\alpha)b(x)$
$\Rightarrow$ lineární rovnice: typ (3) (viz výše)
Příklad 5.11 $y' - xy = -\frac{1}{2}e^{-x^2}y^3$, $\alpha = 3$
$z = y^{1-\alpha} = \frac{1}{y^2}$
$z' = -2y^{-3}y'$
$z' - 2xz = e^{-x^2}$, $\int 2x\mathrm{d}x = x^2$, integrační faktor e^{x^2}
$z'e^{x^2} + 2xe^{x^2}z = (ze^{x^2})' = 1$
$ze^{x^2} = x + c$, c dáno: $x \in (-c; +\infty)$
$z = e^{-x^2}(x+c) = \frac{1}{y^2} \Rightarrow y = \frac{\pm 1}{\sqrt{e^{-x^2}(x+c)}}$, $x > -c$
$y \equiv 0$, $x \in \mathbb{R}$

5.0.6 $a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = b(x)$ - obecné lineární ODR řádu n

(6) obecné lineární ODR řádu n: $a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = b(x)$ (1)
Úmluva značení 5.1 . $\mathcal{I}$ je otevřený interval:
$\mathcal{C}(\mathcal{I}) = \{f(x) : \mathcal{I} \to \mathbb{R} \ldots \text{ spojité}\}$
$k \in \mathbb{N}$: $\mathcal{C}^{(k)}(\mathcal{I}) = \{f(x) : \mathcal{I} \to \mathbb{R}, f(x) \ldots f'(x), \ldots f^{(k)}(x) \text{ spojité v } \mathcal{I}\}$
$\mathcal{C}^\infty(\mathcal{I}) = \cup_{k\in\mathbb{N}} c^k()\mathcal{I}$

Předpoklady P rovnice (1):
$a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x), b(x) \in \mathcal{C}(\mathcal{I})$
$a_0(x) \neq 0$ na $\mathcal{I}$

Lineární operátor (tj. zobrazení)
$L : \mathcal{C}^n(\mathcal{I}) \to C(\mathcal{I})$
$y(x) \mapsto a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x)y(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x)y^{(n-k)}(x)$ je lineární za předpokladů P.
Tj. $L[\lambda \cdot y] = \lambda \cdot L[y]$
$L[y + \tilde{y}] = L[y] + L[\tilde{y}]$

$y, \tilde{y} \in \mathcal{C}^n(\mathcal{I}) : L[y+\tilde{y}] = \sum_{k=0}^n a_k(y+\tilde{y})^{(n-k)} = \sum_{k=0}^n a_k(y^{(n-k)}+\tilde{y}^{(n-k)}) = \sum_{k=0}^n a_k y^{(n-k)} + \sum_{k=0}^n a_k\tilde{y}^{(n-k)}) = L[y] + L[\tilde{y}]$
rovnici (1) lze psát $L[y] = b$

Věta 5.3 Nechť $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ je otevřený inerval a platí předpokladyP. Nechť $x_0 \in \mathcal{I}$, $Y_0, \ldots, Y_{n-1} \in \mathbb{R}$. Pak existuje právě jedno řešení rovnice (1) splňující počáteční podmínky $y(x_0) = Y_0$, $y'(x_0) = Y_1$, ..., $y^{(n-1)}(x_0) = Y_{n-1}$ s definičním oborem $\mathcal{I}$.

DŮKAZ VĚTY 5.3 Později.

□

POZNÁMKA 5.6 n-tého řádu $\Leftrightarrow$ n počátečních podmínek
existuje globální řešení: typické pro ODR
x nelineární rovnice: $y' = y^2$, $y(0) = 1$
$-\frac{y'}{y^2} = -1$
$\left(\frac{1}{y}\right)' = -1 \Rightarrow y(x) = \frac{1}{1-x}$
$\frac{1}{y} = c - x$, $y(0) = 1 \Rightarrow c = 1$
řešení nelze protáhnout za $x = 1$ doprava
$$\begin{cases} L[y] = 0 \ldots \text{ homogenní řešení} \\ L[y] = b \ldots b \not\equiv 0 \text{ na } \mathcal{I} \end{cases}$$

VĚTA 5.4 Množina všech řešení homogenní rovnice $L[y] = 0$ za předpokladů P tvoří n-dimenzionální podprostor v $\mathcal{C}^n(\mathcal{I})$.

DŮKAZ VĚTY 5.4 $H(L) = \{$ všechna řešení $L[y] = 0$, tj. rovnice (1)$\}$ 1) $H(L) \subset \mathcal{C}^n(\mathcal{I})$
$y \in H(L)$ je řešení $\Rightarrow \exists y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)$ vlastní v $\mathcal{I}$.
$\Rightarrow y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)$ spojité v $\mathcal{I} \Rightarrow y \in \mathcal{C}^{n-1}(\mathcal{I})$
$L[y] = 0 \Rightarrow y^{(n)}(x) = -\left[\frac{a_1(x)}{a_0(x)}y^{(n-1)}(x) + \frac{a_2(x)}{a_0(x)}y^{(n-2)}(x) + \ldots + \frac{a_n(x)}{a_0(x)}y(x)\right]$
$H(L) = \{y \in \mathcal{C}^n(\mathcal{I}) : L[y] = 0\} = \mathrm{Ker}L$, jádro je vždy lineární prostor.
$\dim H(L) =?$
zvol $x_0 \in \mathcal{I}$ pevně. Nechť funkce $\{w_k(x)\}_{k=1}^n$ z $\mathcal{C}^n(\mathcal{I})$ řeší $L[y] = 0$ s počátečními podmínkami $w_k^{(j-1)}(x_0) = \delta_{jk}$, $j, k = 1, \ldots, n$
$$\begin{array}{llll} w_1(x_0) = 1 & w_2(x_0) = 0 & \ldots & w_n(x_0) = 0 \\ w_1'(x_0) = 1 & w_2'(x_0) = 0 & \ldots & w_n'(x_0) = 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ w_1^{(n-1)} = 1 & w_2^{(n-1)}(x_0) = 0 & \ldots & w_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{array}$$
existenci $w_k(x)$ zajišťuje Věta 5.3 . w_k tvoří bazi $H(L)$:
$\{w_k\}$ jsou lineárně nezávislé: $\underbrace{\sum_{k=1}^{n} c_k w_k(x)}_{\tilde{y}(x)} \equiv 0$ v $\mathcal{I} \Rightarrow c_k = 0$
$\tilde{y}(x)$ řeší $L[\tilde{y}] = 0$
$\tilde{y}(x_0) = \sum_{k=1}^n c_k w_k(x)^{(l-1)}(x_0) = c_l$, $l = 1, \ldots, n$
$\tilde{y} \equiv 0$ v $\mathcal{I} \Rightarrow c_k = 0$, $k = 1, \ldots, n$
b) $\{w_k\}$ generují $H(L)$: $\tilde{y} \in H(L)$ dáno
$x_0 : \tilde{\tilde{y}} = \sum_{k=1}^n \underbrace{\tilde{y}^{(k-1)}(x_0)}_{\text{konstanta}} \underbrace{w_k(x)}_{\text{funkce } x}$; $\tilde{\tilde{y}}(x)$ řeší $L[y] = 0$
$\tilde{\tilde{y}}(x_0) = \tilde{y}(x_0)$
$l = 1, \ldots, n$ $\tilde{\tilde{y}}^{(l-1)}(x_0) = \sum_{k=1}^n \tilde{y}^{(k-1)}(x_0) \cdot \underbrace{w_k^{(l-1)}(x_0)}_{=\delta_{kl}} = \tilde{y}^{(l-1)}(x_0)$
$\tilde{y}$ a $\tilde{\tilde{y}}$ mají stejné počáteční podmínky v x_0
$\Rightarrow \tilde{y} \equiv \tilde{\tilde{y}}$ v $\mathcal{I}$ (věta 5.3 $\Rightarrow$ jednoznačnost řešení)
$\dim H(L) = n$.

□

JINÝ POHLED: $\varphi : H(L) \to \mathbb{R}^n$

$x_0 \in \mathcal{I}$ pevné $y \mapsto \begin{pmatrix} y(x_0) \\ y'(x_0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}$

φ je izomorfismus prostorů (tj. lineární, vzájemně jednoznačné zobrazení).

□

ÚMLUVA ZNAČENÍ 5.2 . Libovolná báze prostoru $H(L)$ se nazývá <u>FUNDAMENTÁLNÍ SYSTÉM ŘEŠENÍ</u> rovnice $L[y] = 0$.

PŘÍKLAD 5.12

1. $y'' + y = 0$ F.S. $\{\cos x, \sin x\}$
2. $y^{(5)} = 0$ F.S. $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$

Speciální případ: konstantní koeficienty $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$, $a_0 \neq 0$
$(a_0 y^{(n)}(x) + \ldots + a_n y(x) = 0)$ - homogenní
řešení má tvar $y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$
$[\mathrm{e}^{\lambda x}]^{(n)} = \lambda^n \mathrm{e}^{(\lambda x)} \Rightarrow L[\mathrm{e}^{\lambda x}] = \sum_{k=0}^n a_k \lambda^{n-k} \mathrm{e}^{\lambda x} = \mathrm{e}^{\lambda x} \underbrace{p(\lambda)}_{\text{polynom}}$, kde $p(\lambda) = \sum_{k=0}^n a_k \lambda^{n-k}$ ...
charakteristický polynom
$L[\mathrm{e}^{\lambda x}] = \mathrm{e}^{\lambda x} p(\lambda)$
Je-li $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ kořen $p(\lambda) \Rightarrow \mathrm{e}^{\lambda_0 x} \in H(L)$
$\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{C}$: $\underbrace{\mathrm{e}^{\lambda_1 x}, \ldots, \mathrm{e}^{\lambda_r x}}_{\text{možnosti pro F.S.}}$
Obtíže: vícenásobné kořeny: $\lambda_j \in \mathbb{C}$ (komplexní kořeny)
$\lambda_0 \in \mathbb{C}$ je k-násobný kořen $p(\lambda)$:
$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k q(\lambda)$
neboli $\begin{pmatrix} p(\lambda_0) \\ \vdots \\ p^{(k-1)}(\lambda_0) \end{pmatrix}$

$$L[\mathrm{e}^{\lambda x}] = \mathrm{e}^{\lambda x} p(x) / \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \text{ komplexní derivace}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} L[\mathrm{e}^{\lambda x}] = x\mathrm{e}^{\lambda x} p(\lambda) + \mathrm{e}^{\lambda x} p'(\lambda)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} L[\mathrm{e}^{\lambda x}] = (*) = L[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \mathrm{e}^{\lambda x}] = L[x\mathrm{e}^{\lambda x}]$$

$$L[x\mathrm{e}^{\lambda x}] = \mathrm{e}^{\lambda x} [\underbrace{xp(\lambda) + p'(\lambda)}_{\text{je-li alespoň 2-násobný kořen, tak pro } \lambda = \lambda_0 \text{ je to } 0}]$$

$$\Rightarrow x\mathrm{e}^{\lambda_0 x} \in H(L)$$

OBECNĚ: derivuji l-krát podle λ, $l < k$.

$$L[x^l e^{\lambda x}] = e^{\lambda x}[\underbrace{\ldots\ldots}_{\text{lineární kombinace } p(\lambda), p'(\lambda), \ldots, p^{(l)}(\lambda)}]$$
$$= 0 \text{ pro } \lambda = \lambda_0$$

JINÝ POHLED: F.S.: $e^{\lambda x} q(x)(\lambda - \lambda_0)^k = 0$ i po l derivacích, $l < k$

ZÁVĚR:
λ_0 je k-násobný kořen $p(\lambda)$
$\Rightarrow \underbrace{x^0 e^{\lambda_0 x}, x e^{\lambda_0 x}, x^2 e^{\lambda_0 x}, \ldots, x^{k-1} e^{\lambda_0 x}}_{\in H(L)}$

Komplexní λ:
$p(\lambda)$ má koeficienty $\in \mathbb{R}$
Je-li $\lambda_0 = \alpha + i\beta$, pak $\overline{\lambda_0} = \alpha - i\beta$ je také kořen.

$$\left.\begin{array}{l} e^{\lambda_0 x} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}[\cos x + i \sin x] \\ e^{\overline{\lambda_0} x} = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}[\cos x - i \sin x] \end{array}\right. (*)$$

L má reálné koeficienty: Re $\{L[y]\} = L[\text{Re } y]$
DŮSLEDEK: $y \in H(L) \Rightarrow \text{Re } y, \text{Im } y \in H(L)$
$(*)$ nahradím $\begin{array}{l} e^{\alpha x} \cos \beta x \\ e^{\alpha x} \sin \beta x \end{array}$, $z = \text{ Re } + i \text{ Im}$

$$\begin{pmatrix} \text{Re} \\ \text{Im} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2i} & \frac{-1}{2i} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z \\ \overline{z} \end{pmatrix}$$

VĚTA 5.5 Nechť $L[y]$ je homogenní rovnice s konstantními koeficienty. Nechť $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ jsou všechny kořeny charakteristického polynomu $p(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n\lambda^0$ s násobnostmi $k_1, \ldots, k_r$. Potom F.S. vznikne jako:

$$\lambda_i \in \mathbb{R} : e^{\lambda_i x}, x e^{\lambda_i x}, \ldots, x^{k_i - 1} e^{\lambda_i x}$$

$$\lambda_j, \overline{\lambda_j} \in \mathbb{C}, \lambda_j = \alpha + \beta i :$$

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, x e^{\alpha x} \cos \beta x, \ldots, x^{k_j - 1} e^{\alpha x} \cos \beta x$$

$$e^{\alpha x} \sin \beta x, x e^{\alpha x} \sin \beta x, \ldots, x^{k_j - 1} e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

PŘÍKLAD 5.13

1. $y'' + 4y = 0 \ \ldots \ p(\lambda) = \lambda^2 + 4$, $\lambda = \pm 2i$
   F.S.: $\{e^{2ix}, e^{-2ix}\}$

   F.S.: $\{\cos(2x), \sin(2x)\}$

2. $y^{(4)} = 0$: $p(\lambda) = \lambda^4$, $\lambda = 0$
   F.S.: $\{e^{0x}, x e^{0x}, x^2 e^{0x}, x^3 e^{0x}\} = \{1, x, x^2, x^3\}$

DŮKAZ VĚTY 5.5

$$(*) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}L[\mathrm{e}^{\lambda x}] = L[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\mathrm{e}^{\lambda x}]$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}L[\mathrm{e}^{\lambda x}] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\right)^{n-k}[\mathrm{e}^{\lambda x}] = \sum \ldots \text{ (linearita derivace)}$$

$\mathrm{e}^{\lambda x} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^j}{j!}$ ... konvergentní v $\mathbb{C}$, mocninná řada vůči $\lambda_i x$, derivuji člen po členu
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}(x^m\lambda^l) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^m\lambda^l)$ ... D.CV.
Získané funkce jsou lineárně nezávislé:
<u>LEMMA:</u> $\lambda_0 \neq 0$, $p(x)$polynom stupně k. Potom $[p(x)\mathrm{e}^{\lambda_0 x}]' = \tilde{p}(x)\mathrm{e}^{\lambda_0 x}$ ... derivace dle x, kde st $p(x) =$ st $\tilde{p}(x)$.
<u>DŮKAZ LEMMATU:</u> $[p(x)\mathrm{e}^{\lambda_0 x}]' = [\underbrace{p'(x) + \lambda_0 p(x)}_{\text{stupeň } p(x)\text{, nejvyšší člen nemůže vypadnout}}]\mathrm{e}^{\lambda_0 x}$

□

LEMMA 5.2 Nechť $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ jsou různá čísla v $\mathbb{C}$. Nechť $p_1(x), \ldots, p_r(x)$ jsou polynomy. Potom je-li $\sum_{j=1}^{r} p_j(x)\mathrm{e}^{\lambda_j x} \equiv 0$ v $\mathcal{I}$, $(*)$
pak $p_j(x) \equiv 0$ v $\mathcal{I}$.

DŮKAZ LEMMATU 5.2 (indukcí podle r): $r = 1$: $p_1(x)\mathrm{e}^{\lambda_1}x \equiv 0$
$p_1(x) \equiv 0$ q.e.d. (quot erat demonstratum $\equiv$ což bylo ukázat)
indukční krok: $r \Rightarrow r + 1$
$\sum_{j=1}^{r} p_j(x)e^{\lambda_j x} + p_{r+1}(x)e^{\lambda x} \equiv 0 \; / \cdot e^{-\lambda x}$
$\sum_{j=1}^{r} p_j(x)e^{(\lambda_j - \lambda)x} + p_{r+1}(x) \equiv 0$
derivuji, až $p_{r+1}(x)$ bude 0.
dle Lemmatu: $\sum_{j=1}^{n} \tilde{p}_j(x)e^{(\lambda_j-\lambda)x} \equiv 0$, st $\tilde{p} =$ st p
indukční předpoklad: $\tilde{p}_j \equiv 0 \Rightarrow p_j \equiv 0$, $j = 1, \ldots, r$
dle případu $r = 1$: $p_{r+1} \equiv 0$

□

PŘÍKLAD 5.14

$$y^{(6)} + 4y^{(5)} + 8y^{(4)} + 8y^{(3)} + 4y^{(2)} = 0$$

$$p(\lambda) = \lambda^6 + 4\lambda^5 + 8\lambda^4 + 8\lambda^3 + 4\lambda^2 = \lambda^2[\lambda^4 + 4\lambda^3 + 8\lambda^2 + 8\lambda + 4] = \lambda^2[\lambda^2 + 2\lambda + 2]^2$$

$\lambda = 0$ dvojnásobný: $\{1, x\}$
$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \pm i$ dvojnásobné: $\{\mathrm{e}^{-x}\cos x, x\mathrm{e}^{-x}\cos x\}$ a $\{\mathrm{e}^{-x}\sin x, x\mathrm{e}^{-x}\sin x\}$
F.S.: $\{1, x, \mathrm{e}^{-x}\cos x, x\mathrm{e}^{-x}\cos x, \mathrm{e}^{-x}\sin x, x\mathrm{e}^{-x}\sin x\}$

POZNÁMKA 5.7 Důsledek Lemmatu 5.2 : Funkce z věty 5.5 jsou lineárně nezávislé, jejich libovolná lineární kombinace je $\neq 0$. Je-li $= 0 \Rightarrow p_j = 0 \Rightarrow$ triviální lineární kombinace.

5.0.7 $L[y] = b$, $b \not\equiv 0$ - nehomogenní

DEFINICE 5.9 (<u>MNOŽINA NEHOMOGENNÍCH ŘEŠENÍ.</u>)

$$NH(L, b) = \{y : L[y] = b\}.$$

VĚTA 5.6 (TVAR MNOŽINY NH.) Nechť platí předpoklady P a nechť $b(x) \in \mathcal{C}(\mathcal{I})$. Potom $NH(L, b) = \{y_p + y : y \in H(L)\}$, kde y_p (partikulární řešení) je libovolný pevně zvolený prvek $NH(L, b)$.

DŮKAZ VĚTY 5.6 $z_p \in NH(L, b)$ pevné.
$\supseteq$: $L[y_p + y] = L[y_p] + \underbrace{L[y]}_{=0} = b$
$\subseteq$: nechť $\tilde{y}_p \in NH(L, b)$
$L[\tilde{y}_p - y_p] = L[\tilde{y}_p] - L[y_p] = b - b = 0$
$\tilde{y}_p - y_p = y \in H(L)$
$\tilde{y}_p = y_p + y$

□

VĚTA 5.7 (VARIACE KONSTANT.) Nechť platí P a nechť $b(x) \in \mathcal{C}(\mathcal{I})$, nechť $w_{1,\dots,n}(x)$ je libovolný F.S. rovnice $L[y] = 0$. Nech+t funkce $c_1(x), \dots, c_n(x) \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I})$ řeší soustavu rovnic:

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^n c_j'(x) w_j(x) = 0\\ \sum_{j=1}^n c_j'(x) w_j'(x) = 0\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^n c_j'(x) w_j^{(n-2)}(x) = 0\end{gathered}$$

Maticově:

$$\begin{pmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_n \\ w_1' & w_2' & \dots & w_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_1^{(n-1)} & w_2^{(n-1)} & \dots & w_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix}}_{\text{vše závisí na } x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{b}{a_0} \end{pmatrix} \text{ platí } \forall x \in \mathcal{I}$$

Potom funkce

$$y(x) = \sum_{j=1}^n c_j(x) w_j(x)$$

řeší rovnici $L[y] = b$.

DŮKAZ VĚTY 5.7

$$y = \sum_{j=1}^n c_j w_j \qquad [y = y(x), w_j = w_j(x), c_j = c_j(x)]$$

$$y' = \sum_{j=1}^n [c_j' w_j + c_j w_j'] = \underbrace{\sum_{j=1}^n c_j' w_j}_{=0} + \sum_{j=1}^n c_j w_j'$$

$$y'' = \underbrace{\sum_{j=1}^n c_j' w_j'}_{=0} + \sum_{j=1}^n c_j w_j''$$

$$\vdots$$

$$y^{(n-1)} = \sum_{j=1}^{n} c_j w_j^{(n-1)}$$

$$y^{(n)} = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} c_j' w_j^{(n-1)}}_{=\frac{b}{a_0}} + \sum_{j=1}^{n} c_j w_j^{(n)}$$

$$L[y] = \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(n-k)} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k \left(c_j w_j^{(n-k)}\right)}_{S=0\ldots(*)} + \underbrace{a_0 \frac{b}{a_0}}_{b} = b$$

$$(*)\ldots S = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_k c_j w_j^{(n-k)} = \sum_{j=1}^{n} c_j \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k w_j^{(n-k)}}_{L[w_j]} = 0$$

$\square$

PŘÍKLAD 5.15

1. $y'' + y = \frac{1}{1+\cos x}$ ... charakteristický polynom: $p(\lambda) = \lambda^2 + 1 \Rightarrow \lambda = \pm i$
   F.S.: $\{\cos x, \sin x\}$
   $y_p = c_1(x)\cos x + c_2(x)\cos x$
   soustava:

$$\begin{array}{l} c_1'(x)\cos x + c_2'(x)\sin x = 0 \ / \cdot \cos x \\ -c_1'(x)\sin x + c_2'(x)\cos x = \frac{1}{1+\cos x} \ / \cdot -\sin x \\ \hline c_1' + 0 = \frac{\sin x}{1+\cos x} \end{array}$$

$$c_1 = -\int \frac{-\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x = -\ln|1+\cos x|$$
$$x \in \mathcal{I}_k = (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi)$$

$$c_2' = -\frac{\cos x}{\sin x}\cdot c_1'(x) = -\frac{\cos x}{1+\cos x}$$
$$\int \frac{\cos x + 1 - 1}{1+\cos x}\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x + 1}{1+\cos x}\mathrm{d}x - \underbrace{\int \frac{1}{1+\cos x}\mathrm{d}x}_{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = x - \operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

$$y_p = (-\ln|1+\cos x|)\cos x + \left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} - x\right)\sin x$$

$$y_{\text{obecné}} = (A - \ln|1+\cos x|)\cos x + \left(B + \operatorname{tg}\frac{x}{2} - x\right)\sin x,\ \ x \in \mathcal{I}_k,$$

   kde A a B je přičtené řešení homogenní úlohy.

2. $y''' + y'' = xe^{-x}$ ... $p(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 = \lambda^2(\lambda+1) \Rightarrow \lambda = 0$ dvojnásobný, $\lambda = -1$ jednoduchý

F.S.: $\{e^{-x}, 1, x\}$
$y_p = c_1(x)\cdot 1 + c_2(x)\cdot x + c_3(x)\cdot e^{-x}$

$$\begin{array}{l}
c_1'(x)\cdot 1 + c_2'(x)\cdot x + c_3'(x)\cdot e^{-x} = 0\\
c_1'(x)\cdot 0 + c_2'(x)\cdot 1 + c_3'(x)\cdot(-e^{-x}) = 0\\
c_1'(x)\cdot 0 + c_2'(x)\cdot 0 + c_3'(x)\cdot e^{-x} = x\cdot e^{-x}\\
\hline
c_3'(x) = x\\
c_2'(x) = x\cdot e^{-x}\\
c_1'(x) = -x^2\cdot e^{-x} - x\cdot e^{-x}\\
\hline
c_3(x) = \frac{x^2}{2}\\
c_2(x) = -(1+x)\cdot e^{-x}\\
c_1(x) = (x^2+2x+2)\cdot e^{-x} + (1+x)\cdot e^{-x} = e^{-x}\cdot(x^2+3x+3)\\
\hline
\end{array}$$

$$y_{\text{obecné}} = e^{-x}(x^2+3x+3A)\cdot 1 + [B-(1+x)\cdot e^{-x}]\cdot x + [C+\frac{x^2}{2}]\cdot e^{-x}$$

POZNÁMKA 5.8 Matice (w_{jk}) je regulární $\forall x \in \mathcal{I}$.
2 úkoly metody:

1. zinvertovat matici $= c_i'$
2. zinvertovat c_i'

VĚTA 5.8 (PARTIKULÁRNÍ ŘEŠENÍ - SPECIÁLNÍ PŘÍPAD.) Je-li $L[y] = b$ rovnice s konstantními koeficienty, potom:

- a) pokud $b(x) = x^s e^{\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $s \geq 0$ celé, pak existuje partikulární řešení ve tvaru

$$y_p = x^k P(x) e^{\lambda x},$$

  kde $P(x)$ je polynom stupně s a k říká, kolikanásobným kořenem charakteristického polynomu takové λ je. (Když λ není kořenem charakteristického polynomu, $k = 0$.)

- b) pokud $b(x) = x^s e^{\alpha x}\cos\beta x$, nebo $x^s e^{\alpha x}\sin\beta x$, kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a $s \geq 0$ celé, potom existuje partikulární řešení ve tvaru

$$y_p = x^k P(x) e^{\alpha x}\left[P_1(x)\cos\beta x + P_2(x)\sin\beta x\right],$$

  kde $P_1(x)$ a $P_2(x)$ jsou polynomy stupně s a k je násobnost čísla $(\alpha+i\beta)$ jako kořene charakteristického polynomu. Není-li $(\alpha+i\beta)$ kořenem charakteristického polynomu, je $k = 0$.

DŮKAZ VĚTY 5.8 NEPROVÁDÍME.

□

PŘÍKLAD 5.16 $y'' + 2y' + 3y = \sin x$ ... případ b): $s = 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $k = 0 \Rightarrow i$ není kořenem $p(\lambda)$.
$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 3$
Věta 5.8 :

$$y_p = P_1(x)\cos x + P_2(x)\sin x$$

st $P_1(x), P_2(x) = 0 \to$ konstanta

dosadit: $\begin{cases} y_p = A\cos x + B\sin x \\ y_p' = -A\sin x + B\cos x \\ y_p'' = -A\cos x - B\sin x \\ A, B \in \mathbb{R} \end{cases}$

$$-A\cos x - B\sin x - 2A\sin x + 2B\cos x + 3A\cos x + 3B\sin x = \sin x$$

Porovnání koeficientů (můžu to udělat, $\sin x$ a $\cos x$ jsou nezávislé funkce)

$$(-A + 2B + 3A)\cos x = 0 \Rightarrow B = -A$$

$$(-B - 2A + 3B)\sin x = 1\sin x$$

$$B = \frac{1}{4}, \qquad A = -\frac{1}{4}$$

$$y_p = \frac{1}{4}(\sin x - \cos x)$$

$(\lambda + 1)^2 + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \pm i\sqrt{2}$
F.S.: $\{\mathrm{e}^{-x}\cos\sqrt{2}x, \mathrm{e}^{-x}\sin\sqrt{2}x\}$

$$y_{\text{obecné}} = \frac{1}{4}\sin x - \frac{1}{4}\cos x + \mathrm{e}^{-x}[K_1\cos\sqrt{2}x + K_2\sin\sqrt{2}x] \;\; K_1, K_2 \in \mathbb{R}$$

Kapitola X

Spočetné množiny a mohutnost

Pojmy v této kapitole: Spočetná množina, kartézský součin, vyčíslitelné číslo, stejná mohutnost, menší nebo rovná mohutnost, ostře menší mohutnost, potenční množina. Věta Cantorova (2×).

Definice X.1 (Spočetná množina.) Množina $\mathcal{A}$ se nazve spočetná, pokud existuje vzájemně jednoznačné zobrazení ϕ mezi množinou $\mathbb{N}$ přirozených čísel a $\mathcal{A}$.

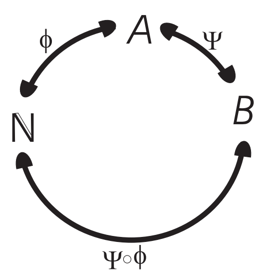
Příklad X.1

1. množina $\mathbb{N}$
2. množina $\mathcal{S}$ všech sudých čísel je spočetná:

   $\phi : n \mapsto 2n$

   $\mathbb{N} \to \mathcal{S}$
3. množina $\mathcal{Z}$ ceLých čísel je spočetná:

$$\mathcal{Z} = \begin{array}{ccccccc} \{ & 0, & 1, & -1, & 2, & -2, & \dots \} \\ & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \end{array}$$



Pozorování X.1 Je-li $\mathcal{A}$ spočetná a existuje-li vzájemně jednoznačné zobrazení $\Psi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, pak $\mathcal{B}$ je také spočetná.

Pozorování X.2 Je-li $\mathcal{A}$ spočetná, $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ je nekonečná, potom $\mathcal{B}$ je spočetná.

$$\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, \dots\}$$

$$\mathcal{B} = \{a_2, a_10, a_22, \dots\} = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$$

Definice X.2 (Kartézský součin množin $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$.)

$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{ \underbrace{(a, b)}_{\text{dvojice prvků}} : a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}\}$$

VĚTA X.1 Jsou-li $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ spočetné, je $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ spočetná.

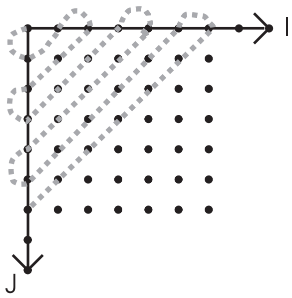
DŮKAZ VĚTY X.1 $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ spočetné: $\mathcal{A} = \{a_i, i \in \mathbb{N}\}$; $\mathcal{B} = \{b_j, j \in \mathbb{N}\}$

$\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{(a_i, b_j) : i, j \in \mathbb{N}\}$

(a_1, b_1)

$(a_1, b_2), (b_2, a_1)$

$(a_3, b_1), (a_2, b_2), (a_1, b_3)$



$\square$

PŘÍKLAD X.2 Množina $\mathbb{Q}$ všech racionálních čísel je spočetná.

$\mathcal{M} = \{(p, q) : p \in \mathcal{Z}, q \in \mathbb{N}, p, q \text{ nesoudělná}\}$

$\mathcal{M} \subset \underbrace{\mathcal{Z} \times \mathbb{N}}_{\text{spočetná}}$ spočetná dle Věty X.1 . $\mathcal{M}$ je nekonečná (Pozorování X.2) $\Rightarrow$ $\mathcal{M}$ je spočetná.

$\Psi : \mathcal{M} \leftrightarrow \mathbb{Q}$

$(p, q) \mapsto \frac{p}{q}$

VĚTA X.2 (<u>CANTOROVA VĚTA.</u>) Interval $\mathcal{I} = (0; 1)$ je nespočetný.

DŮKAZ VĚTY X.2 <u>SPOREM:</u> (CANTOROVA DIAGONÁLNÍ METODA).

Nechť $x_1, x_2, \ldots$ vyčerpá $\mathcal{I}$.

$X_1 = 0.x_1^1 x_1^2 x_1^3 \ldots$

$X_2 = 0.x_2^1 x_2^2 x_2^3 \ldots$

obecně x_i^j je j-tá částice v X_i

Definujme $x_0 \in \mathcal{I}$ takto: $X_0 = x_0^1 x_0^2 x_0^3 \ldots$, kde

$$x_0^i \begin{cases} 1, & \text{pokud } x_i^i \neq 1 \\ 2, & \text{pokud } x_i^i = 1 \end{cases}$$

Důsledek: $x_0 \neq x_i$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (liší se na i-té pozici) $\Rightarrow$ SPOR

$\square$

POZNÁMKA X.1 <u>DŮSLEDEK:</u> $\mathbb{R}$ je nespočetná.

$\Psi(x) := \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{1+(x)}\right)$ zobrazení $\mathbb{R} \to (0,1)$ d.cv.

spor: $\mathbb{R}$ spočetná $= (0,1)$ spočetný (Pozorování X.1).

POZNÁMKA X.2 <u>DŮSLEDEK:</u> Existují imaginární čísla.

LEMMA X.1 Nechť $\mathcal{A}$ je konečná neprázdná množina. Pak množina $\tilde{\mathcal{L}}$ všech konečných posloupností prvků z $\mathcal{A}$ je spočetná.

DŮKAZ LEMMATU X.1 $\mathcal{A}$ má N prvků:

1. všechny 1-písmenné ... N
2. všechny 2-písmenné ... N^2

$\vdots$

$\square$

POZNÁMKA X.3 <u>DŮSLEDEK:</u> Množina všech literárních děl je spočetná.

$\mathcal{A} =$ abeceda + interpunkce

DEFINICE X.3 (<u>VYČÍSLITELNÉ ČÍSLO.</u>) Číslo $x \in \mathbb{R}$ se nazve <u>VYČÍSLITELNÉ</u>, pokud existuje algoritmus, který pro dané $n \in \mathbb{N}$ vypočte x na n platných číslic.

PŘÍKLAD X.3 $\mathbb{Q}$ jsou vyčíslitelná - dělení se zbytkem

$\mathrm{e} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$

$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots$

LEMMA X.2 Množina všech vyčíslitelných čísel je spočetná.

DEFINICE X.4 (<u>STEJNÁ MOHUTNOST.</u>) Řekneme, že $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ mají <u>STEJNOU MOHUTNOST</u>, pokud existuje vzájemně jednoznačné zobrazení mezi $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$, značíme

$$\mathcal{A} \approx \mathcal{B}.$$

DEFINICE X.5 (<u>MENŠÍ NEBO ROVNÁ MOHUTNOST.</u>) Řekneme, že mohutnost $\mathcal{A}$ je <u>MENŠÍ NEBO ROVNÁ</u> mohutnosti $\mathcal{B}$, pokud existuje prosté zobrazení $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ (ne nutně „na“), značíme

$$\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}.$$

DEFINICE X.6 (<u>OSTŘE MENŠÍ MOHUTNOST.</u>) Pokud $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ a neplatí $\mathcal{A} \approx \mathcal{B}$, pak říkáme, že mohutnost $\mathcal{A}$ je <u>OSTŘE MENŠÍ</u> než mohutnost $\mathcal{B}$, značíme

$$\mathcal{A} \prec \mathcal{B}.$$

PŘÍKLAD X.4

1. $\mathbb{N} \approx \mathcal{Z} \approx \mathbb{Q}$, obecně spočetné množiny $\mathcal{A} \approx \mathcal{B}$.
2. $\mathbb{N} \prec \mathbb{R}$
3. $\mathbb{R} \approx (0,1)$
4. lze ukázat: $\{f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\} \succ \mathbb{R}$

   $\{f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ spojité }\} \succ \mathbb{R}$

POZNÁMKA X.4 <u>PROBLÉM:</u> (Cantor 1878: hypotéza kontinua)

Je-li $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}$ nekonečná, pak buď $\mathcal{M} \approx \mathbb{N}$ nebo $\mathcal{M} \approx \mathbb{R}$.

<u>JINAK:</u> Neexistuje $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}$ nekonečná, aby $\mathbb{N} \prec \mathcal{M} \prec \mathbb{R}$

1938: nelze „vyvrátit“

1963: nelze „dokázat“

DEFINICE X.7 (<u>POTENČNÍ MNOŽINA.</u>)

$$\mathcal{P}(\mathcal{A}) := \{\mathcal{M} : \mathcal{M} \subset \mathcal{A}\}$$

PŘÍKLAD X.5

$$\mathcal{P}(\{a,b\}) = \{\varnothing, \{a,b\}, \{a\}, \{b\}\}$$

VĚTA X.3 (<u>CANTOROVA VĚTA.</u>) Pro každou množinu $\mathcal{A}$ je $\mathcal{A} \prec \mathcal{P}(\mathcal{A})$.

DŮKAZ VĚTY X.3 <u>SPOREM:</u>

$\phi : \mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{A})$ vzájemně jednoznačné.

$$\mathcal{M} := \{a \in \mathcal{A}; a \notin \phi(\mathcal{A})\}$$

$$\mathcal{M} \subset \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{M} \in \mathcal{P}(\mathcal{A}) : \exists m \in \mathcal{A} : \phi(m) = \mathcal{M}.$$

$$? \begin{cases} m \in \mathcal{M} \Rightarrow m \notin \phi(m) = \mathcal{M} \ldots \text{ spor} \\ m \notin \mathcal{M} \Rightarrow m \in \phi(m) = \mathcal{M} \ldots \text{ spor} \end{cases}$$

$\square$

Kapitola 6

Funkce více proměnných

POJMY V TÉTO KAPITOLE: Norma, normovaný prostor, okolí bodu, kruhové okolí, prstencové okolí, limita posloupnosti, limita funkce, spojitost, derivace ve směru, derivace ve směru pro vektorovou funkci, parciální derivace, Jakobiho matice, gradient, totální diferenciál, okolí a limita v nekonečnu, parciální derivace vyšších řádů, diferenciál 2. řádu, Hessova matice. Heineho věta, vztah limity a spojitosti, věta o střední hodnotě, věta o záměnnosti parciálních derivací, věta o vztahu D^2F a $\mathrm{H}F$.

DEFINICE 6.1 (NORMOVANÝ PROSTOR.) Nechť $\mathcal{X}$ je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$. Zobrazení $||\cdot|| : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ se nazve NORMA, pokud

- (N1) $||x|| \geq 0 \ \forall x \in \mathcal{X}$; $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- (N2) $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x|| \ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ x \in \mathcal{X}$
- (N3) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ (Δ-nerovnost)

Dvojice $(\mathcal{X}, ||\cdot||)$ se nazývá NORMOVANÝ PROSTOR.

PŘÍKLAD 6.1

1. $(\mathbb{R}, ||\cdot||)$
2. $(\mathbb{C}, ||\cdot||)$, $|z| = \sqrt{(\mathrm{Re}\ z)^2 + (\mathrm{Im}\ z)^2}$
3. $\mathbb{R}^p = \{\vec{x} = (x_1, \dots, x_p) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, p\}$

POZNÁMKA 6.1 $\vec{x}$ je vektor, takto ho budu značit.

DEFINICE 6.2 (NORMY.)

$(\alpha) : ||\vec{x}||_1 := \sum_{i=1}^{p} |x_i|; i = 1, \dots, p$

$(\beta) : ||\vec{x}||_2 := \sqrt{b(\vec{x}, \vec{x})} = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} x_i^2}; i = 1, \dots, p$

$(\gamma) : ||\vec{x}||_\infty := \max\{|x_i|; i = 1, \dots, p\}$

Příklad 6.2 Jsou to normy?

- (N1) … snadné
- (N2) … pro (α): $||\lambda \cdot \vec{x}||_1 = \sum_{i=1}^{p} |\lambda x_i| = |\lambda| \cdot \sum_{i=1}^{p} |x_i| = |\lambda| \cdot ||\vec{x}||_1$
  pro (β), (γ) … D.CV.
- (N3) … pro (α): $\vec{x} = (x_1, \dots, x_p)$, $\vec{y} = (y_1, \dots, y_p)$
  $||\vec{x} + \vec{y}||_1 = \sum_{i=1}^{p} |x_i + y_i| \le \sum_{i=1}^{p} (|x_i| + |y_i|) = ||\vec{x}||_1 + ||\vec{y}||_1$
  pro (β) později, pro (γ) … D.CV.

Definice 6.3 (Okolí bodu.) Nechť $(\mathcal{X}, ||\cdot||)$ je normovaný prostor. $\vec{x_0} \in \mathcal{X}$, $\varepsilon > 0$. Potom definujeme
kruhové okolí:

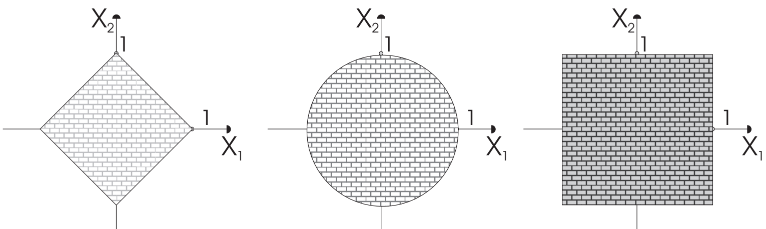
$$\mathcal{U}(\vec{x_0}, \varepsilon) = \mathcal{U}_{\mathcal{X}}(x_0, \varepsilon) := \{\vec{x} \in \mathcal{X} : ||\vec{x} - \vec{x_0}|| < \varepsilon\}$$

prstencové okolí:

$$\mathcal{P}(\vec{x_0}, \varepsilon) := \mathcal{U}(\vec{x_0}, \varepsilon) \setminus \{\vec{x_0}\} = \{\vec{x} \in \mathcal{X} : 0 < ||\vec{x} - \vec{x_0}|| < \varepsilon\}$$

Příklad 6.3 $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$
pro (α): $||\vec{x}||_1 = |x_1| + |x_2| < 1$
pro (β): $||\vec{x}||_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 1$

pro (γ): $||\vec{x}||_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\} < 1$



(α) (β) (γ)

Definice 6.4 (Limita posloupnosti.) Nechť $(\mathcal{X}, ||\cdot||)$ je normovaný prostor. $\vec{x_0}, \vec{x_n} \in \mathcal{X}$. Potom $\vec{x_n} \to \vec{x_0}$ neboli

$$\lim_{n\to\infty} \vec{x_n} = \vec{x_0} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \ge n_0 \Rightarrow \vec{x_n} \in \mathcal{U}_{\mathcal{X}}(\vec{x_0}, \varepsilon)$$

neboli

$$||\vec{x_n} - \vec{x_0}|| \to 0.$$

POZNÁMKA 6.2 Konvergence v $\mathbb{R}^p$ nezáleží na tom, kterou z norem (α), (β), (γ) zvolím.
Důkaz: Nechť $|x_j| = \max\{|x_i : i = 1, \dots, p|\}$ ($\vec{x} \in \mathbb{R}^p$ dán.)
Potom

$$\underbrace{|x_j|}_{=||\vec{x}||_\infty} = \sqrt{x_i^2} \leq \underbrace{\sqrt{\sum_{i=1}^{p} x_i^2}}_{\leq||\vec{x}||_2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{p} x_j^2} \leq \underbrace{\sqrt{P}|x_j|}_{\leq\sqrt{P}\cdot||\vec{x}||_\infty}$$

$||\vec{x}||_\infty$ a $||\vec{x}||_2$ jsou ekvivalentní ohledně definice konvergence.
OBECNĚ PLATÍ: V $\mathbb{R}^p$ jsou všechny normy ekvivalentní (vedou ke stejné konvergenci).

DEFINICE 6.5 (LIMITA FUNKCE.) Nechť $(\mathcal{X}, ||\cdot||)$, $(\mathcal{Y}, ||\cdot||)$ jsou normované prostory. Nechť $F(x) : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ je definována na jistém okolí $\vec{x_0} \in \mathcal{X}$. Potom

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x_0}} F(x) = \vec{y_0} (\in \mathcal{Y}) \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\, \exists\delta > 0 : F\left(\mathcal{P}_{\mathcal{X}}\left(\vec{x_0}, \delta\right)\right) \subset \mathcal{U}_{\mathcal{Y}}\left(\vec{y_0}, \varepsilon\right)$$

nebo také

$$\forall\varepsilon > 0\, \exists\delta > 0 : 0 < ||\vec{x_0} - \vec{x}||_{\mathcal{X}} < \delta \Rightarrow ||F(\vec{x}) - \vec{y_0}||_{\mathcal{Y}} < \varepsilon.$$

VĚTA (HEINEHO VĚTA.) Nechť $F(x)$, $(\mathcal{X}, ||\cdot||)$, $(\mathcal{Y}, ||\cdot||)$ jsou jako v definici. Potom je ekvivalentní

1. $\lim_{\vec{x}\to\vec{x_0}} F(\vec{x}) = \vec{y_0}$
2. Pro každou posloupnost $\{\vec{x_n}\}$ splňující
   - (a) $\vec{x_n} \xrightarrow{\mathcal{X}} \vec{x_0}$
   - (b) $\vec{x_n} \neq \vec{x_0}\ \forall n$

   platí, že $F(\vec{x_n}) \xrightarrow{\mathcal{Y}} \vec{y_0}$.

DŮKAZ VĚTY POZDĚJI.

□

POZNÁMKA 6.3 V $\mathbb{R}^p$ preferujeme $||\cdot||_2$ - tj. normu (β) - EUKLEIDOVSKOU.

PŘÍKLAD 6.4

1. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+||(\vec{x},\vec{y})||_2^2)}{||(\vec{x},\vec{y})||_2^2} = 1$
   $(x, y) \to (0, 0)\ \dots\ 0 < ||(\vec{x}, \vec{y})||_2 \to 0$
2. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$
   Zkusme:

$$(x_n, y_n) = \left(0, \frac{1}{n}\right)$$

$= \frac{0 \cdot \frac{1}{n}}{0^2 + \frac{1}{n^2}} = 0$ pro $n \to \infty$
Heine: limita (pokud existuje) je 0
něco jiného:

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$$

$= \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$ pro $n \to \infty$
$\Rightarrow$ limita neexistuje ($F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$)
Použití obecné posloupnosti:

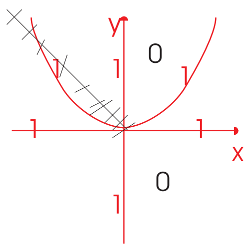
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{r_n^2 \cos\varphi_n \sin\varphi_n}{r_n^2} = \cos\varphi_n \sin\varphi_n$$

$\Rightarrow$ limita neexistuje

3. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x| \cdot y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$
$(x_n, y_n) = \left(0, \frac{1}{n}\right) \Rightarrow \lim \to 0$
$(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \Rightarrow \lim \to 0$
OBECNÝ SMĚR: $(x_n, y_n) = \left(\frac{a}{n}, \frac{b}{n}\right)$, $(a, b) \neq (0, 0)$;
$\Rightarrow \lim \to 0$

Limita v každém směru je 0. To ale neznamená, že limita je 0!!!
PROTIPŘÍKLAD:

$$F(x, y) = \begin{cases} 1, y = x^2 \\ 0, y \neq x^2 \end{cases}$$



$\lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x, y)$ neexistuje
$\lim_{(x,y)\to(0,0)} F\left(\frac{a}{n}, \frac{b}{n}\right) = 0 \ldots (a, b) \neq (0, 0)$ pevný vektor
OBECNÁ POSLOUPNOST:
$(x_n, y_n) \to (0, 0) \Rightarrow$ užij polární souřadnice!!!
$x_n = r_n \cdot \cos\varphi_n$
$y_n = r_n \cdot \sin\varphi_n$
$r_n > 0 \ \forall n$; $r_n \to 0$
$\{\varphi_n\}$ libovolná
$||(x_n, y_n)||_2 = r_n \ \frac{r_n^3 |\cos\varphi_n| \cdot \sin^2\varphi_n}{r_n} \to 0$
HEINE: $\Rightarrow$ limita je 0.

POZNÁMKA 6.4 (Konvergence po souřadnicích v $\mathbb{R}^p$.)
Nechť $\vec{x_0} = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ a $\vec{x_n} = (x_1^n, \ldots, x_p^n) \in \mathbb{R}^p$, kde ^{n} je horní index!
Platí $\vec{x_n} \to \vec{x_0}$ neboli $||\vec{x_n} - \vec{x_0}||_{\text{cokoli}} \to 0$ pro $n \to \infty \Leftrightarrow x_i^n \to x_i$ pro $n \to \infty \ \forall i = 1, \ldots, p$

Definice 6.6 (Spojitost.) Nechť $\vec{F}(\vec{x}) : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, kde $(\mathcal{X}, ||\cdot||)$, $(\mathcal{Y}, ||\cdot||)$ jsou normované prostory. Pak $\vec{F}(x)$ je spojitá v $\vec{x_0} \in \mathcal{X}$, právě když

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : ||\vec{x} - \vec{x_0}||_{\mathcal{X}} < \delta \Rightarrow ||\vec{F}(\vec{x}) - \vec{F}(\vec{x_0})||_{\mathcal{Y}} < \varepsilon$$

neboli

$$\vec{F}\left(\mathcal{U}_{\mathcal{X}}(\vec{x_0}, \delta)\right) \subset \mathcal{U}_{\mathcal{Y}}\left(\vec{F}(\vec{x_0}), \varepsilon\right).$$

Věta (Vztah limity a spojitosti.) $\vec{F}(\vec{x})$ je spojitá v $\vec{x_0} \in \mathcal{X}$, právě když $\lim_{\vec{x} \to \vec{x_0}} \vec{F}(\vec{x}) = \vec{F}(\vec{x_0})$

Důkaz věty Později.

□

Poznámka 6.5 $\vec{F}(\vec{x}) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$
$\vec{F} = (F_1, \ldots, F_q)$, $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_p)$
$F_1 = F_1(x_1, \ldots, x_p)$
$\vdots$
$F_q = F_q(x_1, \ldots, x_p)$

snadno vidíme: $\vec{F}(\vec{x})$ je spojitá v $\vec{x_0} \in \mathbb{R}^p \Leftrightarrow F_j(\vec{x})$ je spojitá v $\vec{x_0}$.

Definice 6.7 (Derivace ve směru.) Nechť $F(\vec{x}) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$. Nechť $\vec{x_0} \in \mathbb{R}^p \ldots$ bod, $\vec{v} \in \mathbb{R}^p \ldots$ vektor. Derivací $F(\vec{x})$ v bodě $\vec{x_0}$ ve směru $\vec{v}$ rozumíme

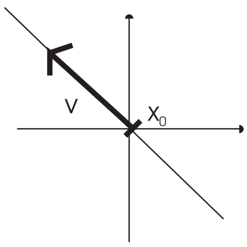
$$\partial_{\vec{v}} F(\vec{x_0}) = \frac{\partial F}{\partial \vec{v}}(\vec{x_0}) := \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[F(\vec{x_0} + t \cdot \vec{v}) - F(\vec{x_0})].$$

Derivace ve směru pro vektorovou funkci:

$$\vec{F} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q, \vec{v}, \vec{x_0} \in \mathbb{R}^p$$

$$\mathbb{R}^p \ni \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{v}}(\vec{x_0}) := \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[\vec{F}(\vec{x_0} + t\vec{v}) - \vec{F}(\vec{x_0}].$$

Poznámka 6.6 Označíme-li $\varphi(t) = F(\vec{x_0} + t \cdot \vec{v})$, potom



$$\frac{\partial F}{\partial \vec{v}}(\vec{x_0}) = \varphi'(0)$$

... derivuj dle t!!!

Poznámka 6.7

$$\partial_{2\mathcal{X}} F(\vec{x_0}) = 2\partial_{\vec{v}} F(\vec{x_0})$$

D.CV.; $\vec{x_0} = (x_1^0, \ldots, x_p^0)$

Definice 6.8 (<u>Parciální derivace.</u>) Nechť $F(\vec{x}) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$. Nechť $\vec{x_0} \in \mathbb{R}^p$. Potom <u>parciální derivací</u> $F(\vec{x})$ v bodě $\vec{x_0}$ podle x_j, $j \in \{1, \ldots, p\}$ rozumíme

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(\vec{x_0}) = \partial_j F(\vec{x_0}) := \frac{\partial F}{\partial \vec{e_j}}(\vec{x_0}),$$

kde $\vec{e_j} = (0, 0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{\uparrow j}, 0, \ldots, 0)$.

Jinak:

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(\vec{x_0}) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[F(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{j-1}^0, x_j^0 + t, x_{j+1}^0, \ldots, x_p^0) - F(x_1^0, \ldots, x_p^0)].$$

Názorně: derivuji dle x_j, ostatní x_i považuji za konstanty.

Definice 6.9 (<u>Jakobiho matice.</u>) Nechť $\vec{F}(\vec{x}) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$. Nechť $\vec{x_0} \in \mathbb{R}^p$. <u>Jakobiho maticí</u> $\vec{F}(\vec{x})$ v bodě $\vec{x_0}$ rozumíme

$$\mathrm{J}F(\vec{x_0}) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\vec{x_0})\right)_{\substack{i = 1, \ldots, q \\ j = 1, \ldots, p}}$$

Typ matice q řádků a p sloupců.

<u>Speciálně:</u> $q = 1$: $\mathrm{J}\vec{F}(\vec{x_0})$ nazveme <u>gradient</u>, značíme $\nabla \vec{F}(\vec{x_0})$.

Příklad 6.5

- a) $F(x, y) = x - y$
  $\mathrm{J}F = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$
- b) $F(x, y) = \frac{x}{y}$
  $\mathrm{J}F = \begin{pmatrix} \frac{1}{y} & \frac{-x}{y^2} \end{pmatrix}$
- c) $F(x, y) = (x \cdot \cos x; y \cdot \sin y) \ldots \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
  $\mathrm{J}F = \begin{pmatrix} \cos y & -x \cdot \sin y \\ \sin y & x \cdot \cos y \end{pmatrix}$
  1. řádek: F_1, 2. řádek: F_2
  1. sloupec: $\frac{\partial}{\partial x}$, 2. sloupec: $\frac{\partial}{\partial y}$

Příklad 6.6

$$F(x, y) = \begin{cases} 1; x - y = 0 \\ 0; x - y \neq 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = 0,$$

ale $F(x,y)$ není v $(0,0)$ spojitá (ani tam nemá limitu)

$$F(\frac{1}{n};\frac{1}{n}) \to 0 \neq F(0,0) = 1$$

Lze sestrojit funkci nespojitou, kde derivace ve všech směrech jsou nula.

POZNÁMKA 6.8

$$F(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : F'(x_0) = A \Leftrightarrow F(x_0 + h) = F(x_0) + A \cdot h + o(h)$$

DEFINICE 6.10 (DIFERENCIÁL.) Nechť $\vec{F}(\vec{x}) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$. Nechť $\vec{x_0} \in \mathbb{R}^p$. Lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ se nazve TOTÁLNÍ DIFERENCIÁL $\vec{F}(\vec{x_0})$ v bodě $\vec{x_0}$, pokud

$$\vec{F}(\vec{x_0} + \vec{h}) = \vec{F}(\vec{x_0}) + L\vec{h} + \vec{z}(\vec{h}),$$

kde $\vec{h} = (h_1, \dots, h_p)$ je vektor.

$\frac{||\vec{z}(\vec{x})||}{||\vec{h}||} \to 0$ pro $\vec{h} \to \vec{0}$.

ZNAČENÍ: $L = \mathrm{D}\vec{F}(\vec{x_0})$; $L\vec{h} = \mathrm{D}F(\vec{x_0}, \vec{h})$.

POZNÁMKA 6.9 $\vec{F} = (F_1, \dots, F_q)$: $\vec{F}$ má diferenciál $\Leftrightarrow$ každá F_j má diferenciál.

VĚTA 6.1 Má-li $\vec{F}(\vec{x}) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ v bodě $\vec{x_0} \in \mathbb{R}^p$ diferenciál, je v $\vec{x_0}$ spojitá.

DŮKAZ VĚTY 6.1

$$\vec{F}(\vec{x_0} + \vec{h}) - \vec{F}(\vec{x_0}) = L\vec{h} + \vec{z}(\vec{h}).$$

Když $\vec{h} \to \vec{0}$, pak $\vec{z}(\vec{h} \to \vec{0}$, protože $\vec{z} = o(||\vec{h}0||)$. Když $\vec{h} \to \vec{0}$, pak $h_j \to 0$ a i $Lh_i \to 0$ $\Rightarrow L\vec{h} \to \vec{0}$. (ze spojitosti lineárního zobrazení)

□

LEMMA 6.1 Nechť $A : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ je lineární zobrazení. Pak existuje $K > 0$, závislé pouze na A tak, že

$$||A\vec{x}||_{(2)} \leq K \cdot ||\vec{x}||_2 \ \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^p.$$

POZNÁMKA 6.10 Samozřejmě Eukleidova norma, u $|| \cdot ||_2$ nepíšu $_2$.

DŮKAZ LEMMATU 6.1 $A = \left(\ a_{mn} \ \right)_{\ m=1,\dots,qn=1,\dots,p}$ maticově.

$\underbrace{[A\vec{x}]_k}_{k\text{-tá složka vektoru } A\vec{x}} = \sum_{j=1}^{p} a_{kj} x_j$

Označme: $\alpha = \max |a_{mn}|$. Pak

$$|[A\vec{x}]_k| \leq p \cdot \alpha \cdot ||\vec{x}||/^2 i \cdot \sum_{j=1}^{p}$$

$$||A\vec{x}||^2 \leq p^2\alpha^2 p||\vec{x}||^2$$

Lze vzít: $K = p\alpha\sqrt{q}$ (toto není nejlepší).

□

POZNÁMKA 6.11 <u>DŮSLEDEK:</u> Každé lineární zobrazení je spojité. Protože $||A(\vec{x}-\vec{y})|| \leq K||\vec{x}-\vec{y}||$.

VĚTA 6.2 Má-li $\vec{F}(\vec{x}) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ v bodě $\vec{x_0} \in \mathbb{R}^p$ diferenciál. Pak existuje $\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{v}}(\vec{x_0})$ pro každé $\vec{v} \in \mathbb{R}^p$ a platí

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{v}}(\vec{x_0}) = \mathrm{D}\vec{F}(\vec{x_0}, \vec{v}).$$

DŮKAZ VĚTY 6.2 Nechť $\vec{v} \neq \vec{0}$. Počítáme

$$\frac{1}{t}[\vec{F}(\vec{x_0}+t\vec{v}) - \vec{F}(\vec{x_0})] = \frac{1}{t}[\mathrm{D}\vec{F}(\vec{x_0}, t\vec{v}) + \vec{z}(t\vec{v})] = \frac{1}{t}[\mathrm{D}\vec{F}(\vec{x_0}, \vec{v})] + \underbrace{\frac{\vec{z}(t\vec{v})}{t}}_{\to 0}$$

Ale:

$$\underbrace{\frac{\vec{z}(t\vec{v})}{||t\vec{v}||}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{|t|\cdot||\vec{v}||}{t}}_{\text{omezená}}$$

$$\vec{z}(\vec{h}) = o(\vec{h})$$

□

<u>SPECIÁLNĚ:</u> Označme $\vec{F}'(\vec{x_0}) \ldots$ matice reprezentující $\mathrm{D}\vec{F}(\vec{x_0})$, tj. $\mathrm{D}\vec{F}(\vec{x_0}, \vec{h}) = \vec{F}'(\vec{x_0})\cdot \vec{h}$

$$\underbrace{\frac{\partial \vec{F}}{\partial x_i}}_{i\text{-tý sloupec } \mathrm{J}\vec{F}(\vec{x_0})}(\vec{x_0}) = \frac{\partial \vec{F}}{\partial e_i}(\vec{x_0}) = \mathrm{D}\vec{F}(\vec{x_0}, \vec{e_i}) = \underbrace{\vec{F}'(\vec{x_0})\cdot\vec{e_i}}_{i\text{-tý sloupec } \vec{F}'(\vec{x_0})}$$

<u>TEDY:</u> $\mathrm{J}\vec{F}(\vec{x_0}) = \vec{F}'(\vec{x_0})$ pouze tehdy, existuje-li diferenciál.
<u>TAKŽE:</u> existence $\mathrm{J}\vec{F}(\vec{x_0})$ neimplikuje ($\not\Rightarrow$) existenci totálního diferenciálu,
<u>ALE:</u> $\mathrm{J}\vec{F}(\vec{x_0})$ je jediný kandidát.

□

VĚTA 6.3 Nechť $\vec{F}(\vec{x}) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ má v bodě $\vec{x_0} \in \mathbb{R}^p$ spojité všechny parciální derivace. Potom $\vec{F}(\vec{x})$ Má v bodě $\vec{x_0}$ diferenciál a platí $\vec{F}'(\vec{x_0}) = \mathrm{J}\vec{F}(\vec{x_0})$.

DŮKAZ VĚTY 6.3 Nechť $\vec{x_0} = (x_1, \ldots, x_p) \ldots$ bod, $\vec{h} = (h_1, \ldots, h_p) \ldots$ vektor,

$$\vec{x}^0 = (x_1, x_2, \ldots, x_p) = \vec{X}_0$$

$$\vec{x}^1 = (x_1+h_1, x_2, \ldots, x_p)$$

$$\vec{x}^2 = (x_1+h_1, x_2+h_2, x_3, \ldots, x_p)$$

$\vdots$

$$\vec{x^p} = \vec{X_0} + \vec{h}$$

$$\vec{F}(\vec{x_0} + \vec{h}) - \vec{F}(\vec{x_0}) = \sum_{j=1}^{p} \vec{F}(\vec{x^j}) - \vec{F}(\vec{x}^{j-1}) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial \vec{F}}{\partial x_j}(\vec{\eta_j}) \cdot \vec{h_j} = (*)$$

<u>Lagrange:</u> $\vec{x^j} - x^{\vec{j}-1} = (0, \dots, 0, \underbrace{h_j}_{\uparrow j}, 0, \dots, 0)$

tj. $\eta_j = (x_1 + h_1, \dots, x_{j-1} + h_{j-1}, x_j + \Theta_j, x_{j+1}, x_p)$, kde $\Theta_j \in (0, h_j)$.

$$(*) = \underbrace{\sum_{j=1}^{p} \frac{\partial \vec{F}}{\partial x}(\vec{x_0}) \cdot h_1}_{\mathrm{J}\vec{F}(\vec{x_0})\cdot\vec{h}} + \vec{z}(\vec{h})$$

$$\vec{z}(\vec{h}) = \sum_{j=1}^{p} \underbrace{|\frac{\partial F}{\partial x}(\vec{\eta_j}) \cdot \frac{\partial}{\partial x}(\vec{x_0})|}_{\to 0 (\text{ze spojitosti})} \cdot \underbrace{\frac{||\vec{h}||}{||\vec{h}||}}_{=1} \to 0$$

$$\vec{h} \to \vec{0} \Rightarrow \vec{\eta_j} \to \vec{x_0}$$

$\square$

Příklad 6.7 $F(x,y) = \begin{cases} 0; (x,y) = (0,0) \\ \frac{xy^2}{x^2+y^2}; (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$

$\mathrm{D}F = ?$
$(x,y) \neq (0,0)$:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{y^2(x^2+y^2) - 2x(xy^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^4 - x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2}$$

Parciální derivace spojité všude mimo $(0,0)$.

$$(x_0, y_0) \neq (0,0) : F'((x_0,y_0)) = \begin{pmatrix} \frac{y_0^4 - y_0^2x_0^2}{(x_0^2+y_0^2)^2} & \frac{2x_0^3y_0}{(x_0^2+y_0^2)^2} \end{pmatrix}$$

v bodě $(0,0)$:

$$F(x,0) = 0 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(0,0)$$

$$F(0,y) = 0 \forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}(0,0)$$

$\mathrm{D}F(0,0) = 0$, pokud existuje.
Dle definice:

$$\frac{1}{||\vec{h}||}[F'((0,0) + \vec{h}) - F((0,0)) - (0,0) \cdot \vec{h}] \xrightarrow{?} 0 \text{ pro } \vec{h} \to \vec{0}$$

$\vec{h} = (h_1, h_2)$

$$\frac{h_1 h_2^2}{h_1^2 + h_2^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \frac{h_1 h_2^2}{(h_1^2 + h_2^2)^{\frac{3}{2}}} \ (*)$$

POLOŽME: na přímce h_1 nebo h_2.

$$(*) = \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} \not\to 0 \text{ neblíží se do nuly}$$

$\mathrm{D}F((0,0))$ neexistuje
ale: $F(x, y)$ je spojitá v $(0, 0) = \vec{0}$, protože

$$|F(x, y)| = \underbrace{\frac{|xy|}{x^2 + y^2}}_{\leq \frac{1}{2}} \cdot |y| \leq \frac{1}{2}|y| \to 0 \text{ pro } (x, y) \to \vec{0}$$

POZNÁMKA 6.12 Existuje deferenciál $\Rightarrow$ funkce je spojitá. Ne naopak!!!

VĚTA 6.4 Nechť $\vec{F}(\vec{x}) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ má v bodě $\vec{x_0} \in \mathbb{R}^p$ diferenciál. Nechť $\vec{G}(\vec{x}) : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^s$ má diferenciál v bodě $\vec{F}(\vec{x_0}) = \vec{y_0} \in \mathbb{R}^q$. Potom $\vec{G}_\circ\vec{F}$ má diferenciál v bodě $\vec{x_0}$ a platí:

$$\mathrm{D}[\vec{G}_\circ\vec{F}](\vec{x_0}) = \mathrm{D}\vec{G}(\vec{y_0})_\circ \mathrm{D}\vec{F}(\vec{x_0}).$$

DŮKAZ VĚTY 6.4 Nepíšeme vlnky u vektorů, vynecháváme:

1. $F(x_0 + h) = F(x_0) + Ah + y(h)$, kde $A = \mathrm{D}F(x_0)$
2. $G(y_0 + k) = G(y_0) + Bk + w(k)$, kde $B = \mathrm{D}G(y_0)$

Platí $\frac{||z(h)||}{||h||} \to 0$ pro $||h|| \to 0$; $\frac{||w(k)||}{||k||} \to 0$ pro $||k|| \to 0$.

$$\begin{aligned} (G_\circ F)(x_0 + h) &= G(F(x_0 + h)) = (1) = \\ &= G(\underbrace{F(x_0)}_{y_0} + \underbrace{Ah + z(h)}_{k}) = (2) = \\ &= G(F(x_0)) + B[Ah + z(h)] + w(Ah + z(h)) = \\ &= G(F(x_0)) + BAh + \underbrace{Bz(h)}_{\varphi(h)} + \underbrace{w(Ah + z(h))}_{\psi(h)} \end{aligned}$$

ad $\varphi(h)$: $\frac{||Bz(h)||}{||h||} \leq \frac{K||z(h)||}{||h||} \to 0$ (Lemma 6.1) dle předpokladů
ad $\psi(h)$: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : ||h|| < \delta \Rightarrow ||\psi(h)|| < \varepsilon||h||$, ε dáno.
$\exists K > 0$: $||Ah|| \leq K||h||$ (Lemma 6.1)
$\exists \eta > 0$: $||k|| < \eta \Rightarrow ||w(k)|| < \frac{\varepsilon}{K+1} \cdot ||k||$ (neboť $\frac{||w(k)||}{||k||} \to 0$)
$\exists \delta_1 > 0$: $||h|| < \delta_1 \Rightarrow ||z(h)|| < ||h||$ (neboť $\frac{||z(h)||}{||h||} \to 0$)
$\delta = \min(\delta_1, \frac{\eta}{K+1})$: $||w(Ah + z(h))|| < \frac{\varepsilon}{K+1}||Ah + z(h)|| < (\Delta)$
$||Ah + z(h)|| < K||h|| + ||h|| = (K + 1)||h|| \leq (K + 1)\frac{\eta}{K+1} = \eta$
$(\Delta) < \frac{\varepsilon}{K+1}(K + 1)||h|| = \varepsilon||h||$ $\square$

POZNÁMKA 6.13 DŮSLEDEK:

$$(G_\circ F)(\vec{x_0}) = G'(\vec{y_0}) \cdot F'(\vec{x_0})$$

$\vec{F} = (F_1, \dots, F_q)$, $\vec{G} = \vec{G}(y_1, \dots, y_q)$

$$[(G_\circ F)'(\vec{x_0})]_{m=1,\dots,p,n=1,\dots,s} = \frac{\partial}{\partial x_n}[G_m(\vec{F})](x_0) =$$

$$= [G'(\vec{y_0}) \cdot F'(\vec{x_0})]_{m,n} = \sum_{j=1}^{q} [G'(\vec{y_0})]_{m,j} \cdot [F'(\vec{x_0})]_{j,n} =$$

$$= \sum_{j=1}^{q} \frac{\partial G_m}{\partial y_j}(\vec{y_0}) \cdot \frac{\partial F_j}{\partial x_n}(\vec{x_0})$$

VĚTA 6.5 (VĚTA O STŘEDNÍ HODNOTĚ.) Nechť $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^p$. Nechť $F(\vec{x}) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ má diferenciál všude v nějaké konvexní $\Omega \in \mathbb{R}^p$ obsahující body $\vec{a}, \vec{b}$. Pak existuje $\vec{c}$ na spojnici bodů $\vec{a}, \vec{b}$ tak, že

$$F(\vec{b}) - F(\vec{a}) = \nabla F(\vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}).$$

DŮKAZ VĚTY 6.5

$$\varphi(t) := F(\vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}))$$

$\varphi(0) = F(\vec{a})$, $\varphi(1) = F(\vec{b})$
$\psi : t \mapsto \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a})$
$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$
$\psi' = \vec{b} - \vec{a}$
$\varphi'(t) = \nabla F(\vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a})) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial F}{\partial x_j}(\dots) \cdot (b_j - a_j)$
Lagrange: $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\tau)$, kde $\tau \in (0;1)$
$\Rightarrow \vec{c} \in \vec{a} + \tau(\vec{b} - \vec{a})$.

□

DEFINICE 6.11 (OKOLÍ ∞.)

KRUHOVÉ OKOLÍ.

$$\mathcal{U}(\infty, \varepsilon) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^p : ||\vec{x}|| > \frac{1}{\varepsilon}\} \cup \{\infty\}$$

PRSTENCOVÉ OKOLÍ.

$$\mathcal{P}(\infty, \varepsilon) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^p : ||\vec{x}|| > \frac{1}{\varepsilon}\}$$

DEFINICE 6.12 (LIMITA.)

$$\lim_{\vec{x} \to \infty} F(\vec{x}) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : x \in \mathcal{P}(\infty, \delta) \Rightarrow F(\vec{x}) \in \mathcal{U}(A, \varepsilon)$$

$(||\vec{x}|| > \frac{1}{\varepsilon})$.

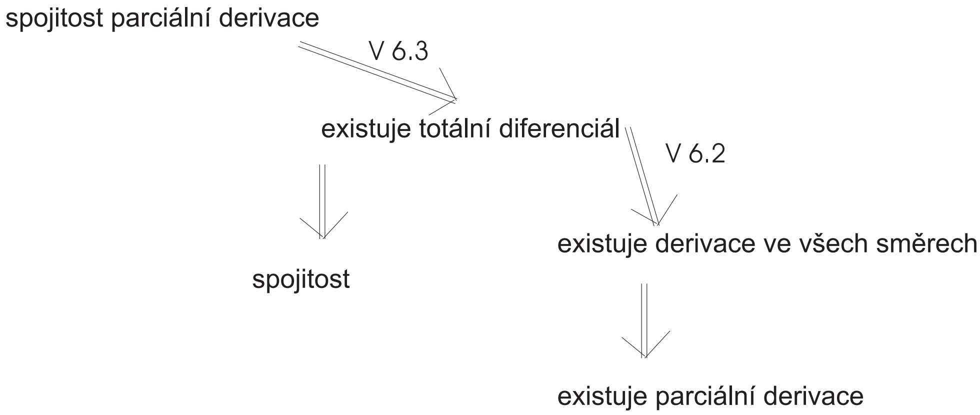
POZNÁMKA 6.14 <u>POZOR!!!</u> $\{\vec{x^n}\} \subseteq \mathbb{R}^p$: $||\vec{x^n}|| \to \infty$ neimplikuje $|x_j| \to \infty$, také neimplikuje alespoň jedna složka $\to \infty$

PŘÍKLAD 6.8

$$\mathbb{R}^2 \in \vec{x^n} = \begin{cases} (n,0); n \text{ sudé} \\ (0,n); n \text{ liché} \end{cases}$$

$||\vec{x^n}|| = n \to \infty$ $\lim_{\vec{x}\to\infty} F(x) =$ obecná posloupnost bodů z $\mathbb{R}^2$ do ∞: $r_n \to +\infty$, $\{\varphi_n\}$ libovolná

POZNÁMKA 6.15



DEFINICE 6.13 (<u>PARCIÁLNÍ DERIVACE VYŠŠÍCH ŘÁDŮ.</u>) $F(\vec{x}) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$

$$\frac{\partial^k F}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}},$$

kde $i_1, i_2, \dots, i_k \in \{1, \dots, p\}$.
Intuitivně: $k = 1$ ... již známe: $\frac{\partial^1 F}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial x}$
$k + 1$:

$$\frac{\partial^{k+1} F}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_{k+1}}} := \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \left[\frac{\partial^k F}{\partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_{k+1}}} \right]$$

POZNÁMKA 6.16 Zkracujeme: $\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_1} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}$ ... význam $\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)$.

VĚTA 6.6 (<u>VĚTA O ZÁMĚNNOSTI PARCIÁLNÍCH DERIVACÍ.</u>) Nechť $F(\vec{x}) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, nechť $\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}$ a $\frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1}$ jsou spojité v bodě $\vec{x_0} \in \mathbb{R}^2$. Potom

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0) = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1}(x_0).$$

DŮKAZ VĚTY 6.6 $\vec{x_0} = (x_0, y_0)$, zvolme $h, k > 0$.
$(*)$ $\frac{1}{hk}[F(x_+h, y_0 + k) - F(x_0 + h, y_0) - (F(x_0, y_0 + k) - F(x_0, y_0))]$.

Definuji: $\varphi(x) = F(x, y_0 + k) - F(x, y_0)$, pak $(*)$ $\frac{1}{hk}(\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)) = \frac{1}{hk} \cdot \varphi'(\eta) \cdot h$
LANGRANGEOVA VĚTA: $\exists \eta \in (x_0, x_0 + h) = \frac{1}{k}\varphi'(\eta) = (\Delta) = \frac{1}{k}(\frac{\partial}{\partial x_1} F(\eta, y_0 + h) - \frac{\partial}{\partial x_1} F(\eta, y_0)) = (**)$
$(\Delta) : \varphi'(x) = \frac{\partial}{\partial x_1} F(x, y_0 + k) - \frac{\partial}{\partial x_1} F(x, y_0)$
nechám η pevné: označ $\psi(y) = \frac{\partial F}{\partial x_1}(\eta, y)$. $(**) = \frac{1}{k}(\psi(y_0 + k) - \psi(y_0)) = (\clubsuit \star \spadesuit)$
$(\clubsuit)$: Lagrangeova věta: $\exists \Theta \in (y_0, y_0 + k)$
$(\clubsuit \star \spadesuit) = \psi'(0) = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1}(\eta, \Theta) = (*)$.

$$x_0 < \eta < x_0 + h$$
$$y_0 < \Theta < y_0 + k$$

Pošlu $h, k \to 0$, např. $h = k = \frac{1}{n} \Rightarrow (n, 0) \to (0, 0)$
spojitost $(*)$
$(*) = \frac{1}{hk}[F(x_0 + h, y_0 + k) - F(x, y_0 + k) - (F(x_0 + h, y_0) - F(x_0, y_0))] = (\spadesuit)$

$\varphi(y) = F(x_0 + h, y) - F(x_0, y)$
$\psi'(y) = \frac{\partial F}{\partial x_2}(x_0 + h, y) - \frac{\partial F}{\partial x_2}(x_0, y)$
$\exists \Theta \in (y_0, y_0 + h)$

$(\spadesuit) = \frac{1}{hk}(\varphi(y_0 + k) - \varphi(y_0)) = \frac{1}{h}\varphi'(\Theta) = \frac{1}{h}(\frac{\partial F}{\partial x_2}(x_0 + h, \Theta) - \frac{\partial F}{\partial x_2}(x_0, \Theta)) = (\#)$

$\exists \eta \in (x_0, x_0 + h)$

$(\#) = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2 (\eta, \Theta)} \to \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}(\vec{x_0})$.
pro $(h, k) \to (0, 0)$

□

POZNÁMKA 6.17 Věta 6.6 platí i za slabších předpokladů.

POZNÁMKA 6.18 Body, kde $\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} \neq \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1}$ existují, ale jsou vzácné. Viz Příklady 9, cv. 7.

POZNÁMKA 6.19 DŮSLEDEK VĚTY 6.6
$F(\vec{x})$ má v bodě $\vec{x_0} \in \mathbb{R}^p$ spojité všechny parciální derivace do řádu k včetně, potom

$$\frac{\partial^k F}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(\vec{x_0}) = \frac{\partial^k F}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_k}}(\vec{x_0}),$$

je-li $(i_1, \dots, i_k)$ je libovolná permutace $(j_1, \dots, j_k)$.

DŮKAZ: BÚNO:

$$(i_1, i_2, \dots, i_s, i_{s+1}, \dots, i_k)$$
$$(i_1, i_2, \dots, i_{s+1}, i_s, \dots, i_k) = (j_1, \dots, j_k)$$

(věta 6.6)
Každá permutace se dá složit z transpozic.

Definice 6.14 (<u>Diferenciál 2. řádu.</u>) Nechť $\vec{F}(\vec{x}) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$. Nechť $\vec{x_0} \in \mathbb{R}^p$. Nechť existuje $\mathrm{D}F(\vec{x_0})$. <u>Diferenciálem 2. řádu</u> funkce $\vec{F}(\vec{x})$ v bodě $\vec{x_0}$ nazvu bilineární zobrazení $\mathcal{M} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, splňující

$$F(\vec{x_0} + \vec{h}) = F(\vec{x_0}) + \mathrm{D}F(\vec{x_0}, \vec{h}) + \mathcal{M}(\vec{h}, \vec{h}) + o(||\vec{h}||^2)$$

pro $\vec{h} = (h_1, \ldots, h_p) \to \vec{0}$.

Úmluva značení 6.1

$$\mathcal{M} = \mathrm{D}^2 F(\vec{x_0})$$

$$\mathcal{M}(\vec{h}, \vec{h}) = \mathrm{D}^2 F(\vec{x_0}; \vec{h}, \vec{h}),$$

kde $\vec{x_0}$ je pevný bod a $\vec{h}, \vec{h}$ jsou proměnné

Definice 6.15 (<u>Hessova matice.</u>) Nechť $F(\vec{x}) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$.

$$\mathrm{H}F(x_0) = \left(\tfrac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x_0}) \right)_{i=1,\ldots,p;j=1,\ldots,p}.$$

Věta 6.7 (<u>Vztah D^2F a $\mathrm{H}F$.</u>) Nechť $F(\vec{x}) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ má v bodě $\vec{x_0} \in \mathbb{R}^p$ spojité všechny parciální derivace až do řádu ≤ 2. Pak existuje $\mathrm{D}^2F(\vec{x_0})$ a je reprezentován pomocí $\mathrm{H}F(\vec{x_0})$ takto:

$$\mathrm{D}^2 F(\vec{x_0}; \vec{h}, \vec{h}) = \frac{1}{2}[\vec{h} \cdot \mathrm{H}F(\vec{x_0}) \cdot \vec{h}^T] = \sum_{i,j=1}^{p} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x_0}) h_i h_j,$$

kde $\vec{h} = (h_1, \ldots, h_p)$.

Důkaz věty 6.7 Bez důkazu!!! :o)

□

Poznámka 6.20 Věta 6.6 $\Rightarrow$ $\mathrm{H}F$ je symetrická.

Poznámka 6.21 Taylor pro 1 proměnnou:

$$F(x_0 + h) = F(x_0) + F'(x_0) \cdot h + \frac{1}{2} F''(x_0) \cdot h^2 + \ldots + o(h^2).$$

Taylor pro p proměnných:

$$F(\vec{x_0} + \vec{h}) = F(\vec{x_0}) + \mathrm{J}F(\vec{x_0}) \cdot \vec{h}^T + \vec{h} \cdot \frac{1}{2} \mathrm{H}F(\vec{x_0}) \cdot \vec{h}^T + \ldots + o(||h||^2).$$

Kapitola 7

Metrické prostory

POJMY V TÉTO KAPITOLE: Metrický prostor, metrika, prostor se skalárním součinem, okolí bodu (kruhové a prstencové), limita posloupnosti, limita funkce, spojitost, otevřená množina, uzavřená množina, vnitřek, hranice, vnějšek a uzávěr množiny, podposloupnost, hromadný bod, kompakt, omezenost, izometrie, konvexní množina, úsečka, Bolzano-Cauchy podmínka, úplný metrický prostor. Heineho věta, věta o vztahu limity a spojitosti, Heineho charakterizace spojitosti, spojitost pomocí otevřenosti, spojitost složené funkce, uzavřenost pomocí posloupností, kompakty v $\mathbb{R}^p$, spojitý obraz kompaktu, charakterizace kompaktnosti, Banachova věta o kontrakci.

DEFINICE 7.1 (METRICKÝ PROSTOR.) Nechť $\mathcal{X}$ je libivolná množina. Funkce $\rho : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ se nazve METRIKA, pokud

- (M1) $\rho(x,y) \geq 0\ \forall x \in \mathcal{X}$; $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- (M2) $\rho(x,y) = \rho(y,x)\ \forall x,y \in \mathcal{X}$
- (M3) $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$ (Δ-nerovnost)

Dvojice $(\mathcal{X},\rho)$ se nazývá METRICKÝ PROSTOR.

PŘÍKLAD 7.1

1. $\mathcal{X} \dots \mathbb{R}$, $\rho(x,y) := |x-y|$
2. $\mathcal{X} \dots$ množina všech stanic metra
   $\rho(u,v) =$ nejmenší počet úseků dílčích u,v:

$$\underbrace{\rho(\text{Muzeum, Můstek})}_{=1} \leq \underbrace{\rho(\text{Muzeum, Florenc})}_{=2} + \underbrace{\rho(\text{Florenc, Můstek})}_{=2}$$

3. DISKRÉTNÍ PROSTOR $\mathcal{X} \dots$ libovolná

$$\rho(x,y) := \begin{cases} 0; x = y \\ 1; x \neq y \end{cases}$$

4. !!! Každý normovaný prostor je zároveň metrický: $(\mathcal{X}, ||\cdot||)$.
   Definuji $\rho(x,y) := ||x-y||$.
   (N1) $\Rightarrow$ (M1)
   (N2) $\Rightarrow$ (M2)
   $$\rho(x,y) = ||x-y|| = ||x-z+z-y|| \leq ||x-z|| + ||z-y|| := \rho(x,z) + \rho(z,y)$$
5. Je-li $(\mathcal{X}, \rho)$ metrický prostor, $\tilde{\mathcal{X}} \in \mathcal{X} \Rightarrow \left(\tilde{\mathcal{X}}, \rho\right)$ je opět metrický prostor
   tj. $(\mathbb{R}^3, \rho)$ ... metrický prostor; $\rho_e(\vec{x}, \vec{y}) := \sqrt{\sum_{i=1}^{p}(x_i - y_i)^2}$ je Eukleidovská metrika.
   Obecně: $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^3$; $(\mathcal{M}, \rho_e)$
6. normovaný prostor: $\mathcal{C}([0;1]) := \{f(x) : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ spojitá}\}$
   $||f||_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$ ... D.CV. je to norma
   $$\rho(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$$
7. $\mathbb{R}^p$ ... skalární součin: $\underbrace{\langle\vec{x}, \vec{y}\rangle}_{\text{Eukleidovská norma}} := \sum_{i=1}^{p} x_i y_i$, kde $\vec{x} = (x_1, \dots, x_p)$ a $\vec{y} = (y_1, \dots, y_p)$
8. $\mathcal{C}([0,1])$ ... skalární součin: $\langle\vec{x}, \vec{y}\rangle := \mathcal{R})\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x$, kde
   $$\langle\vec{x}, \vec{y}\rangle \dots ||f||_2 = \sqrt{\mathcal{R})\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x}$$

Definice 7.2 (Prostor se skalárním součinem.)

$$(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$$

je prostor se skalárním součinem, pokud $\mathcal{X}$ je lineární vektorový prostor a $\langle\cdot,\cdot\rangle$ je bilineární, pozitivně definitní, symetrická forma na $\mathcal{X}$.
Lze zavést normu: $||x|| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Pro tuto normu platí:

- (1) $|\langle x, y\rangle| \leq ||x|| \cdot ||y||$
- (2) $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$

Definice 7.3 (Okolí bodu.) Nechť $(\mathcal{X}, \rho)$ je $\mathcal{M}$: $x_0 \in \mathcal{X}$, $\varepsilon > 0$. Potom definujeme kruhové okolí:

$$\mathcal{U}(\vec{x_0}, \varepsilon) = \mathcal{U}_{(\mathcal{X},\rho)}(\vec{x_0}, \varepsilon) = \mathcal{U}_\rho(x_0, \varepsilon) := \{x \in \mathcal{X} : \rho(x, x_0) < \varepsilon\}$$

prstencové okolí:

$$\mathcal{P}(\vec{x_0}, \varepsilon) = \mathcal{P}_{(\mathcal{X},\rho)}(\vec{x_0}, \varepsilon) = \mathcal{P}_\rho(x_0, \varepsilon) := \{x \in \mathcal{X} : 0 < \rho(x, x_0) < \varepsilon\}$$

neboli

$$\mathcal{U}(x_0, \varepsilon) \setminus \{x_0\} = \mathcal{P}(x_0, \varepsilon)$$

POZNÁMKA 7.1 Zahrnuje všechny dřívější pojmy okolí s výjimkou okolí $\pm\infty$ v $\mathbb{R}^*$ ... není metrický prostor.

POZNÁMKA 7.2 Všechny další pojmy zavedeme pomocí pojmu okolí.

DEFINICE 7.4 (<u>LIMITA POSLOUPNOSTI.</u>) Nechť $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{X}$ ... $x_n \in \mathcal{X}$ $\forall n \in \mathbb{N}; x_\in \mathcal{X}$. Potom $x_n \overset{\mathcal{X}(\rho)}{\to} x_0$ pro $n \to \infty$, pokud

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in \mathcal{U}(x_0, \varepsilon)$$

nebo také

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow \rho(x, x_n) < \varepsilon$$

DEFINICE 7.5 (<u>LIMITA FUNKCE.</u>) Nechť $(\mathcal{X}, \rho)$ je metrický prostora $(\mathcal{Y}, \sigma)$ je metrický prostor. Nechť $F : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, $x_0 \in \mathcal{X}$, $y_0 \in \mathcal{Y}$. Potom $F(x) \overset{\mathcal{Y}}{\to} y_0$ pro $x \overset{\mathcal{X}}{\to} x_0$, pokud

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : F\left(\mathcal{P}_{\mathcal{X}}\left(x_0, \delta\right)\right) \subset \mathcal{U}_{\mathcal{Y}}\left(y_0, \varepsilon\right).$$

VĚTA 7.1 (<u>HEINEHO VĚTA.</u>) Nechť $(\mathcal{X}, \rho)$ a $(\mathcal{Y}, \sigma)$ jsou metrické prostory, $F(x) : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, $x_0 \in \mathcal{X}$, $y_0 \in \mathcal{Y}$. Potom je ekvivalentní

1. $\lim_{x\to x_0} F(x) = y_0$
2. Pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset \mathcal{X}$ splňující
   - (a) $x_n \overset{\mathcal{X}}{\to} x_0$
   - (b) $x_n \neq x_0\ \forall n \in \mathbb{N}$

   platí, že $F(x_n) \to y_0$.

DŮKAZ VĚTY 7.1

- (1) $\Rightarrow$ (2): $\varepsilon > 0$ dáno: podle (1) $\exists \delta > 0 : F\left(\mathcal{P}_{\mathcal{X}}\left(x_0, \delta\right)\right) \subset \mathcal{U}_{\mathcal{Y}}\left(y_0, \varepsilon\right)$.
  Nechť $\{x_n\}$ splňuje (2a) a (2b):
  $x_n \overset{\mathcal{X}}{\to} x_0\ \forall n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 : x_n \in \mathcal{U}_{\mathcal{X}}\left(x_0, \delta\right)$
  $x_0 \neq x_0$ ... $x_n \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}}\left(x_0, \delta\right) \Rightarrow F(x_n) \in \mathcal{U}_{\mathcal{Y}}\left(y_0, \varepsilon\right)$
  $F(x_n) \overset{\mathcal{Y}}{\to} y_0$.

- (2) $\Rightarrow$ (1) dokážu ve tvaru $\neg(1) \Rightarrow \neg(2)$:
  $\neg(1)$: $\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0 : F\left(\mathcal{P}_{\mathcal{X}}\left(x_0, \delta\right)\right) \not\subseteq \mathcal{U}_{\mathcal{Y}}\left(y_0, \varepsilon\right)$
  fixuji $\varepsilon > 0$: polož $\delta = \frac{1}{n}$ ... $\exists x_n$ ... $x_n \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}}\left(x_0, \frac{1}{n}\right)$ & $F(x_n) \notin \mathcal{U}_{\mathcal{Y}}\left(y_0, \varepsilon\right)$
  $\Rightarrow x_n \neq x_0$
  $\rho(x_0, x_n) < \frac{1}{n}$, tj. $x_n \overset{\mathcal{X}}{\to} x_0$ platí (2ab), ale $F(x_n) \not\to y_0$, tj. $\neg(2)$.

□

PŘÍKLAD 7.2 $\{f_n\} \subset \mathcal{C}([0,1])$

$$f_n = \begin{cases} 0; x \in [\frac{1}{n}, 1] \\ 1; x = 0 \\ x; x \in [0, \frac{1}{n}] \end{cases}$$

$||f_n||_\infty = 1$; tj. $f_n \overset{||,||_\infty}{\not\to} 0$

$$||f_n||_2 = \int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x \leq \int_0^{\frac{1}{n}} 1 \cdot \mathrm{d}x = \frac{1}{n} \to 0$$

$f(n) \overset{||f_n||_2}{\not\to} 0 \ldots$ funkce, která $\equiv 0$.

DEFINICE 7.6 (SPOJITOST.) Nechť $(\mathcal{X}, \rho)$ a $(\mathcal{Y}, \sigma)$ jsou metrické prostory. Nechť $F : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, $x_0 \in \mathcal{X}$. Funkce F se nazve SPOJITÁ v x_0, pokud

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : F\left(\mathcal{U}_{\mathcal{X}}(x_0, \delta)\right) \subset \mathcal{U}_{\mathcal{Y}}\left(F(x_0), \varepsilon\right).$$

VĚTA 7.2 (VZTAH LIMITY A SPOJITOSTI.) Nechť $(\mathcal{X}, \rho)$ a $(\mathcal{Y}, \sigma)$ jsou metrické prostory, $F(x) : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, $x_0 \in \mathcal{X}$, $y_0 \in \mathcal{Y}$. Potom je ekvivalentní

1. F je spojitá v $x_0 \in \mathcal{X}$
2. $\lim_{x \to x_0} F(x) = F(x_0)$.

POZNÁMKA 7.3 $\lim_{x \to x_0} x = x_0$. Věta 7.2 říká:
$F(\underbrace{\lim_{x \to x_0} x}_{x_0}) = \lim_{x \to x_0} F(x)$
spojitost $\Leftrightarrow$F lze zaměnit s operací lim

DŮKAZ VĚTY 7.2

- (1) $\Rightarrow$ (2) $\varepsilon > 0$ dáno: $\exists \delta > 0 : F\left(\mathcal{U}(x_0, \delta)\right) \subset \mathcal{U}\left(F(x_0), \varepsilon\right)$
  tím spíše $F\left(\mathcal{P}(x_0, \delta)\right) \subset \mathcal{U}\left(F(x_0), \varepsilon\right)$
  tj. dokázáno (2)
- (2) $\Rightarrow$ (1) $\varepsilon > 0$ dáno: $\exists \delta > 0 : F\left(\mathcal{P}(x_0, \delta)\right) \subset \mathcal{U}\left(F(x_0), \varepsilon\right)$
  $F(x_0) \in \mathcal{U}\left(F(x_0), \varepsilon\right)$
  $\Rightarrow F\left(\mathcal{U}(x_0, \delta)\right) \subset \mathcal{U}\left(F(x_0), \varepsilon\right),$
  tj. (1).

□

VĚTA 7.1 ' (HEINEHO CHARAKTERIZACE SPOJITOSTI.) Následující je ekvivalentní

1. F je spojitá v $x_0 \in \mathcal{X}$
2. $\forall \{x_n\} \subset \mathcal{X}$ splňující $x_n \xrightarrow{\mathcal{X}} x_0$ platí $F(x_n) \xrightarrow{\mathcal{Y}} F(x_0)$.

Důkaz věty 7.1 Bez důkazu.

$\square$

Příklad 7.3 Je zobrazení $F : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathbb{R}$ spojité? ... závisí na metrice!!!
$f(x) \mapsto f(0)$, kde $f(x) \in \mathcal{C}([0,1])$
$||\cdot||_\infty$ ... ano
$||\cdot||_2$ ... ne

Úmluva značení 7.1 $(\mathcal{X}, \rho)$, $(\mathcal{Y}, \sigma)$, $(\mathcal{Z}, \tau)$ jsou metrické prostory.

Definice 7.7 (Otevřená množina.) $\mathcal{G} \subset \mathcal{X}$ se nazve otevřená, pokud

$$\forall x_0 \in \mathcal{G}\ \exists \varepsilon > 0 : \mathcal{U}_{\mathcal{X}}(x_0, \varepsilon) \subset \mathcal{G}$$

Názorně: každý bod je v $\mathcal{G}$ s nějakým okolím.

Příklad 7.4

1. $\mathcal{I} = (a, b) \subset \mathbb{R}$ je otevřeným: $x_0 \in \mathcal{I}$:
   $a < x_0 < b$ ... $\exists \varepsilon > 0$
   $a < x_0 - \varepsilon < x_0 + \varepsilon < b$
   $\mathcal{U}(x_0, \varepsilon) \subset \mathcal{I}$

2. obecně: $\mathcal{U}_{\mathcal{X}}(x_0, \varepsilon)$ je otevřená množina.
   $\tilde{x} \in \mathcal{U}_{\mathcal{X}}(x_0, \varepsilon)$ ... $\rho(x, \tilde{x}) = d < \varepsilon$, zvol $\tilde{\varepsilon} > 0$ tak, že $d + \tilde{\varepsilon} < \varepsilon$, např. $\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\varepsilon - d)$.
   tvrdíme: $\mathcal{U}_{\mathcal{X}}(\tilde{x}_0, \tilde{\varepsilon}) \subset \mathcal{U}_{\mathcal{X}}(x_0, \varepsilon)$. Protože: vezmu $y \in \mathcal{U}_{\mathcal{X}}(\tilde{x}, \tilde{\varepsilon})$:
   $$\rho(y, x_0) \leq \underbrace{\rho(y, \tilde{x})}_{<\tilde{\varepsilon}} + \underbrace{\rho(\tilde{x}, x_)}_{=d} < \tilde{\varepsilon} + d < \varepsilon \Rightarrow y \in \mathcal{U}_{\mathcal{X}}(x_0, \varepsilon)$$

3. triviálně: $\varnothing, \mathcal{X}$ jsou otevřené

Poznámka 7.4 Pojem otevřenosti závisí na $\mathcal{X}$, jehož je $\mathcal{G}$ částí ($\mathcal{G} \subset \mathcal{X}$). Např. $\mathcal{M} = [0, 1)$ ... $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}$ ... není otevřená:
$\mathcal{U}_{\mathbb{R}}(0, \varepsilon) = (-\varepsilon, \varepsilon) \not\subseteq [0, 1)$
ale:
$\mathcal{M} \subset \mathcal{Y} = [0, +\infty)$ s metrikou jako v $\mathbb{R}$.
$\mathcal{U}_{\mathcal{Y}}(0, \varepsilon) = \{x \in \mathcal{Y} : |x - 0| < \varepsilon\} = [0, \varepsilon) \subset \mathcal{M}$ pro $\varepsilon \leq 1$.

Věta 7.3

1. Nechť $\{\mathcal{G}_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ je libovolný systém otevřených množin. Potom též $\cup_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{G}_i$ je otevřená množina.

   Pozor: $\mathcal{I}$ je množina, nikoli interval!!!

2. Nechť $\{\mathcal{G}_i\}_{i \in \mathcal{I}}^n$ jsou otevřené množiny. Potom též $\cap_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{G}_i$ je otevřená množina.

Důkaz věty 7.3

1. $x_0 \in \cup_{i\in\mathcal{I}}\mathcal{G}_i \Leftrightarrow x_0 \in \mathcal{G}_{i_0} \dots$
   $\Rightarrow$ stačí: $\mathcal{G}_{i_0}$ otevřená: $\mathcal{U}(x_0,\varepsilon) \subset \mathcal{G}_{i_0}$ pro jisté $\varepsilon > 0$
   ale $\mathcal{G}_{i_0} \subset \cup_{i\in\mathcal{I}}\mathcal{G}_i$.
2. $x_n \in \cap_{i\in\mathcal{I}}^n\mathcal{G}_i \Leftrightarrow x_0 \in \mathcal{G}_i\ \forall i =, \dots, n$.
   ale: $\mathcal{G}_i \dots$ otevřená množina $\Rightarrow \forall i\ \exists \varepsilon_i > 0$: $\mathcal{U}(x_0,\varepsilon_i) \subset \mathcal{G}_i$
   polož $\varepsilon = \min\{\varepsilon_i : i = 1,\dots,n\}$. Zřejmě $\varepsilon > 0 : \mathcal{U}(x_0,\varepsilon) \subset \mathcal{U}(x_0,\varepsilon_i)\ \forall i \Rightarrow \subset \mathcal{G}_i\ \forall i$
   $\Rightarrow \subset \cap_{i\in\mathcal{I}}^n\mathcal{G}_i$

□

POZNÁMKA 7.5 Položme $\mathcal{G}_i = (-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}) \subset \mathbb{R}$ otevřená.
$\cap_{i\in\mathbb{N}}\mathcal{G}_i = \{0\}$ není otevřená, tj. část (2) neplatí pro nekonečné průniky.

VĚTA 7.4 (SPOJITOST POMOCÍ OTEVŘENOSTI.) Nechť $F(x) : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ je funkce. Pak je ekvivalentní:

1. $F(x)$ je spojitá v každém $x_0 \in \mathcal{X}$.
2. Je-li $\mathcal{M} \subset \mathcal{Y}$ otevřená, je $F^{-1}(\mathcal{M}) \subset$ otevřená.

DŮKAZ VĚTY 7.4

- (1) $\Rightarrow$ (2): $\mathcal{M} \subset \mathcal{Y}$ je otevřená: ? je množina $F^{-1}(\mathcal{M}) = \{x \in \mathcal{X} : F(x) \in \mathcal{M}\} \subset X$ je otevřená
  $x_0 \in F^{-1}(\mathcal{M}) \dots F(x_0) \in \mathcal{M} \dots$ otevřená $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$: $\mathcal{U}_{\mathcal{Y}}(F(x_0),\varepsilon) \subset \mathcal{M}$
  $\mathcal{U}_{\mathcal{X}}(x_0,\delta) \subset F^{-1}(\mathcal{M})$
- (2) $\Rightarrow$ (1): zvol $x_0 \in \mathcal{X}$ libovolné, $\varepsilon > 0$: ? $(\exists\delta > 0)[F(\mathcal{U}_{\mathcal{X}}(x_0,\delta)) \subset \mathcal{U}_{\mathcal{Y}}(F(x_0),\varepsilon)]$
  $\mathcal{U}_{\mathcal{Y}}(F(x_0),\varepsilon)$ je otevřená $\dots F^{-1}(\mathcal{U}_{\mathcal{Y}}(F(x_0),\varepsilon)) \subset \mathcal{X}$ je otevřená a obsahuje x_0.
  Tedy: $\exists\delta > 0$: $\mathcal{U}_{\mathcal{X}}(x_0,\delta) \subset F^{-1}(\mathcal{U}_{\mathcal{Y}}(F(x_0),\varepsilon))$
  $\Rightarrow F(\mathcal{U}_{\mathcal{X}}(x_0,\delta)) \subset \mathcal{U}_{\mathcal{Y}}(F(x_0),\varepsilon)$.

□

VĚTA 7.5 (SPOJITOST SLOŽENÉ FUNKCE.) Nechť $F(x) : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ a $G(x) : \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ jsou spojité funkce. Pak $G_\circ F : \mathcal{X} \to \mathcal{Z}$ je spojité.

DŮKAZ VĚTY 7.5 Dle Věty 7.4 stačí: $\mathcal{M} \subset \mathcal{Z}$ otevřená $\Rightarrow [G_\circ F]^{-1}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{X}$ je otevřená.

$$[G_\circ F]^{-1}(\mathcal{M}) = F^{-1}\underbrace{\{\quad \underbrace{G^{-1}(\mathcal{M})}_{\text{otevřená ze spojitosti } G} \quad\}}_{\text{otevřená ze spojitosti } F}$$

□

POZNÁMKA 7.6 $\{x^2 + y^2 + z^2 < 1\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$

PŘÍKLAD 7.5

1. $\mathcal{M} = \{x^2 + y^2 + z^2 < 1\} \cap \{x + y + z > 0\} \subset \mathbb{R}^3$ je otevřená. $\mathcal{M} = F^{-1}\left((-\infty, 1)\right) \cap G^{-1}\left((0, +\infty)\right)$
$$\left.\begin{array}{r} F : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 \\ G : (x, y, z) \mapsto x + y + z \end{array}\right\} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \text{ spojité}$$

2. $\mathcal{X}$ … diskrétní metrický prostor: $\rho(x, y) = \begin{cases} 0; x = y \\ 1; x \neq y \end{cases}$

   OKOLÍ: $x_0 \in \mathcal{X}$
$$\mathcal{U}_{\mathcal{X}}\left(x_0, \varepsilon\right) = \begin{cases} \mathcal{X}; \varepsilon > 1 \\ \{x_0\}; \varepsilon \leq 1 \end{cases}$$
   každá $\mathcal{G} \in \mathcal{X}$ je otevřená dle Věty 7.4 … každá $F : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ je spojitá (nezávisle na $\mathcal{Y}, F$).
   D.CV.: dokažte přímo z definice (pomocí okolí)

DEFINICE 7.8 (UZAVŘENÁ MNOŽINA.) $\mathcal{F} \subset \mathcal{X}$ se nazve UZAVŘENÁ, právě když dopněk $\mathcal{X} \setminus \mathcal{F}$ je otevřená.

PŘÍKLAD 7.6

1. $\mathcal{I} = [a, b] \subset \mathbb{R}$ je uzavřená množina:
$$\mathbb{R} \setminus [a, b] = \underbrace{(-\infty, a)}_{\text{otevřená množina}} \cup \underbrace{(b, +\infty)}_{\text{otevřená množina}}$$

2. $\emptyset, \mathcal{X}$ jsou uzavřené

3. opět závisí na „referenčním prostoru“

POZNÁMKA 7.7 Zpřesníme terminologii na otevřená (uzavřená) v $\mathcal{X}$.

4. $\mathcal{M} = [0, 1)$
   … není uzavřená v $\mathbb{R}$ … $\mathbb{R} \setminus \mathcal{M} = (-\infty, 0) \cup [1, +\infty) \not\supseteq \mathcal{U}(1, \varepsilon)$ pro žádné $\varepsilon > 0$
   je uzavřená v $\mathcal{Y} = [0, 1)$.

VĚTA 7.3 '

1. $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ uzavřená $\Rightarrow \cap_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{F}_i$ je uzavřená.

2. $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in \mathcal{I}}^n$ uzavřená $\Rightarrow \cup_{i \in \mathcal{I}}^n \mathcal{F}_i$ je uzavřená.

DŮKAZ VĚTY 7.3

1. $\mathcal{X} \setminus \cap_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{F}_i = \cup_{i \in \mathcal{I}} (\mathcal{X} \setminus \mathcal{F}_i)$ … DE MORGANŮV VZOREC
   $\mathcal{F}_i$ … uzavřená $\Rightarrow \mathcal{X} \setminus \mathcal{F}_i$ … otevřená $\Rightarrow$ RHS je otevřená (Věta 7.3 (1))
   $\Rightarrow \cap \mathcal{F}_i$ … uzavřená

2. podobně: $\mathcal{X} \setminus \cup_{i\in\mathcal{I}}^{n} \mathcal{F}_i = \cap_{i\in\mathcal{I}}^{n} (\mathcal{X} \setminus \mathcal{F}_i)$ □

Věta 7.6 (Uzavřenost pomocí posloupností.) Nechť $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$. Potom je ekvivalentní:

1. $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ je uzavřená
2. pokud $x_n \in \tilde{A}$, $x_n \xrightarrow{\mathcal{X}} x_0$, tak $x_0 \in \tilde{A}$.

Důkaz věty 7.6

- $(1) \Rightarrow (2)$: $x_n \in \tilde{A}$; $x_n \to x_0 \in \tilde{A}$: $x_0 \in (\mathcal{X} \setminus \mathcal{A})$ ... otevřená ... $\exists \varepsilon > 0$: $\mathcal{U}(x_0, \varepsilon) \subset (\mathcal{X} \setminus \mathcal{A})$.
  tj. $\mathcal{U}(x_0, \varepsilon) \cap \mathcal{A} = \varnothing$. Zároveň ale $\underbrace{x_n}_{\in \tilde{A}} \to x_0 \Rightarrow x_n \in \mathcal{U}(x_0, \varepsilon)$ pro n dost velké $\Rightarrow$ spor.
- $\neg(1) \Rightarrow \neg(2)$: $\tilde{A}$ není uzavřená ... $\mathcal{X} \setminus \tilde{A}$ není otevřená ... $\exists x_0 \mathcal{X} \setminus \tilde{A}$ ... $\forall \varepsilon > 0$: $\mathcal{U}(x_0, \varepsilon) \not\subseteq \mathcal{X} \setminus \tilde{A}$.
  tj. $\mathcal{U}(x_0, \varepsilon) \cap \mathcal{A} \neq \varnothing$. Zafixuji x_0, počítám s $\varepsilon = \frac{1}{n}$ ... vezmu $x_n \in \tilde{A}$, $x_n \in \mathcal{U}\left(x_0, \frac{1}{n}\right)$. Tedy x_n nesplňují (2) $(x_n \to x_0; x_n \in \tilde{A},$ ale $x \notin \tilde{A})$.

□

Definice 7.9 (Vnitřek.) Pro $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ definujeme vnitřek:

$$\operatorname{int} \mathcal{A} = \{x \in \mathcal{X} : \exists \varepsilon > 0 : \mathcal{U}_{\mathcal{X}}(x, \varepsilon) \subset \mathcal{A}\}$$

Definice 7.10 (Hranice.) Pro $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ definujeme hranici:

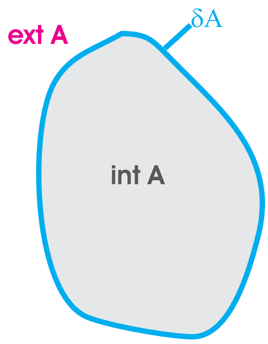
$$\partial \mathcal{A} = \{x \in \mathcal{X} : \exists \varepsilon > 0 : (\mathcal{U}_{\mathcal{X}}(x, \varepsilon) \cap \mathcal{A}) \,\&\, (\mathcal{U}_{\mathcal{X}}(x, \varepsilon) \cap (\mathcal{X} \setminus \mathcal{A}))\}$$

Definice 7.11 (Vnějšek.) Pro $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ definujeme vnějšek:

$$\operatorname{ext} \mathcal{A} = \{x \in \mathcal{X} : \exists \varepsilon > 0 : (\mathcal{U}_{\mathcal{X}}(x, \varepsilon) \subset (\mathcal{X} \setminus \mathcal{A}))\}$$

Definice 7.12 (Uzávěr.) Pro $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ definujeme uzávěr:

$$\overline{\mathcal{A}} = \{x \in \mathcal{X} : \exists \varepsilon > 0 : (\mathcal{U}_{\mathcal{X}}(x, \varepsilon) \cap \mathcal{A} \neq \varnothing)\}$$



PŘÍKLAD 7.7

1. $\mathcal{X} = \mathbb{R}$, $\mathcal{A}$ … interval s krajními body $a < b$.
$$\operatorname{int} \mathcal{A} = (a, b)$$
$$\partial\mathcal{A} = \{a, b\}$$
$$\operatorname{ext} \mathcal{A} = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$$
$$\overline{\mathcal{A}} = [a, b]$$

POZNÁMKA 7.8 Z definice platí:

- $\operatorname{int} \mathcal{A} \subset \mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{A}}$
- $\overline{\mathcal{A}} = \operatorname{int} \mathcal{A} \cup \partial\mathcal{A}$
- $\operatorname{ext} \mathcal{A} \cap \overline{\mathcal{A}} = \varnothing$

2. $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}$ … $x \in \mathbb{R}$ … $\mathcal{U}(x_0, \varepsilon) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ protíná $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}\diagdown\mathbb{Q}$
$\operatorname{int} \mathbb{Q} = \varnothing$
$\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$
$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$
$\operatorname{ext} \mathbb{Q} = \varnothing$

3. $\mathcal{X}$ e diskrétní: Ã $\subset \mathcal{X}$ je libovolná: $x \in \mathcal{X} : \mathcal{U}\left(x_0, \frac{1}{2}\right) = \{x\}$
$\operatorname{int} \mathcal{A} = \mathcal{A}$
$\partial\mathcal{A} = \varnothing$
$\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$
$\operatorname{ext} \mathcal{A} = \mathcal{X}\diagdown\mathcal{A}$

DEFINICE 7.13 (<u>PODPOSLOUPNOST.</u>) Nechť $\{x_n\} \subset \mathcal{X}$ je posloupnost. Posloupnost $\{x'_n\}$ se nazve <u>PODPOSLOUPNOST</u> (nebo posloupnost vybraná z) $\{x_n\}$, pokud existuje rostoucí posloupnost $\{k_n\} \subset \mathbb{N}$ tak, že $x'_n = x_{k_n}$. Značíme: $\{x'_n\} \subset \{x_n\}$.

POZNÁMKA 7.9 $x_n \to x_0$, $\{x'_n\} \subset \{x_n\} \Rightarrow x'_n \to x_0$
<u>Dk.:</u> $\varepsilon > 0 : \exists n_0 : n \geq n_0\ x_n \in \mathcal{U}(x_0, \varepsilon)$.
<u>Klíčové pozorování:</u> $\{k_n\} \subset \mathbb{N}$ rostoucí: $k_n \geq n$
$n \geq n_0 : k_n \geq n_0 : x'_n - x_{k_n} \in \mathcal{U}(x_0, \varepsilon)$.

DEFINICE 7.14 (<u>HROMADNÝ BOD.</u>) Bod $x_0 \in \mathcal{X}$ se nazve <u>HROMADNÝ BOD $\{x_n\}$</u>, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ je $\mathcal{M} = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in \mathcal{U}(x_0, \varepsilon)\}$ nekonečná.

DEFINICE 7.15 (<u>HROMADNÝ BOD.</u>) Bod $x_0 \in \mathcal{X}$ se nazve <u>HROMADNÝ BOD $\{x_n\}$</u>, pokud existuje $\{x_n'\} \subset \{x_n\}$ tak, že $x_n' \to x_0$.

POZNÁMKA 7.10 <u>TVRZENÍ:</u> Obě definice jsou ekvivalentní.

<u>Dk.:</u>

- (1) $\Rightarrow$ (2) $\mathcal{M}_n = \{k \in \mathbb{N} : x_k \in \mathcal{U}\left(x_0, \frac{1}{n}\right)\}$ je nekonečná. $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ shora neomezená.
  x_0 je hromadný bod dle první z definic:
  zvol $k_1 \in \mathcal{M}_1$ - libovolně
  $k_2 \in \mathcal{M}_2$ - aby $k_2 > k_1$
  $\vdots$
  $k_n \in \mathcal{M}_n$ - aby $k_n > k_{n-1}$
  $\{k_n\} \subset \mathbb{N}$ je rostoucí
  $x_n' := x_{k_n} \in \mathcal{U}\left(x_0, \frac{1}{n}\right)$, tj. $x_n' \to x_0$.

- (2) $\Rightarrow$ (1) : x_0 je hromadným bodem dle druhé z definic:
  $\varepsilon > 0$ díno: $x_n' = x_{k_n} \in \mathcal{U}(x_0, \varepsilon)$ pro $n \geq n_0$.
  Potom $\mathcal{M} = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in \mathcal{U}(x_0, \varepsilon)\} \supset \{k_n : n \geq n_0\}_{\text{...nekonečná}}$ i $\mathcal{M}$ je nekonečná.

POZNÁMKA 7.11 Omezená $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ má hromadný bod (v $\mathbb{R}$).

DEFINICE 7.16 (<u>KOMPAKT.</u>) Množina $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ se nazve <u>KOMPAKTNÍ</u> nebo <u>KOMPAKT</u>, pokud každá $\{x_n\} \subset \mathcal{A}$ má hromadný bod $x_0 \in \mathcal{A}$.

PŘÍKLAD 7.8

1. K.M. je vždy kompaktní
2. $\mathcal{I} = [a, b] \subset \mathbb{R}$ je kompaktní. $\{x_n\} \subset [a, b]$, $\exists \{x_n'\} \subset \{x_n\} : x_n' \to x_0$; $a \leq x_0 \leq b$.
3. $\mathcal{I} = (0, 2] \subset \mathbb{R}$ <u>není</u> kompaktní: $x_n = \frac{1}{n} \to 0$
   každá vybraná $x_n' \to 0 \notin (0, 2]$

POZNÁMKA 7.12 Kompaktnost je <u>vnitřní</u> vlastnost.
$(0, 2] \subset \mathbb{R}$ není otevřená, ale $(0, 2] \subset (0, 2]$ je otevřená
$(0, 2]$ není kompaktní $\subset \mathbb{R}$, ani $\subset (0, 2]$.

POZNÁMKA 7.13 Kompaktnost je zobecnění konečnosti.

LEMMA 7.1 Je-li $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ kompaktní, je $\mathcal{A}$ vůči $\mathcal{X}$ uzavřená.

DŮKAZ LEMMATU 7.1 $\mathcal{A}$ není uzavřená $\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ není kompaktní.
$\mathcal{A}$ není uzavřená: Věta 7.6 ... $\exists \{x_n\} \subset \mathcal{A}$; $x_n \to x_0 \notin \mathcal{A}$.
každá vybraná $\{x_n'\} \subset \{x_n\} : x_n' \to x_0 \notin \mathcal{A}$.
$\Rightarrow$ není kompaktní

$\square$

DEFINICE 7.17 (OMEZENOST.) Nechť $\mathcal{X}$ je normovaný prostor. Množina $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ se nazve OMEZENÁ $\Leftrightarrow (\exists c > 0)\,(\forall x \in \mathcal{A})\,[||x|| \leq c]$.

LEMMA 7.2 Nechť $\mathcal{X}$ je normovaný prostor. Je-li $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ kompakt, je omezená.

DŮKAZ LEMMATU 7.2 $\mathcal{A}$ není omezená $\Rightarrow \mathcal{A}$ není kompaktní.
$\mathcal{A}$ není omezená: $(\exists c > 0)\,(\exists x \in \mathcal{A})\,[||x|| > c]$.
uzavřená $c = n \in \mathbb{N} \ldots \exists x_n \ldots ||x_n|| > n$. Nechť x_0 je hromadný bod.

$$||x_n|| = ||x_0 + (x_n - x_0)|| \leq ||x_|| + ||x_n - x_0||$$

$$||x_n - x_0|| \geq ||x_n|| - ||x_0|| > n - ||x_0||$$
$$> 1 \text{ pro } n > ||x_0|| + 1$$

□

POZNÁMKA 7.14 V normovaném prostoru $\mathcal{X}$ kompaktní $\Rightarrow$ omezená, uzavřená.

VĚTA 7.7 (KOMPAKTY V $\mathbb{R}^p$.) Nechť $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^p$. Potom je ekvivalentní:

1. $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ je Kompaktní
2. $\mathcal{A}$ je omezená a uzavřená.

DŮKAZ VĚTY 7.7

- (1) $\Rightarrow$ (2) … Lemmata 7.1 a 7.2 .
- (2) $\Rightarrow$ (1) $\{\vec{x_n}\} \subset \mathcal{A} \ldots$ cíl: má hromadný bod. $\mathcal{A}$ je omezená: $||\vec{x_n}|| \leq c$.
  $\vec{x_n} = (x_1^n, x_2^n, \ldots, x_p^n)$.
  $|x_j^n| \leq ||\vec{x_n}||_2 \leq c$
  vyberu $\{\vec{x'_n}\} \subset \{\vec{x_n}\}$ tak, že $x_1^n \to x_1^0 \in \mathbb{R}$
  vyberu $\{\vec{x''_n}\} \subset \{\vec{x'_n}\}$ tak, že $x_2^n \to x_2^0 \in \mathbb{R}$
  ⋮
  p - kroků: $\{\hat{\vec{x_n}}\} : x_p^n \to x_p^0 \in \mathbb{R}$.
  $\{\hat{\vec{x_n}}\} \to \vec{x_0} = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0)$
  konvergence po složkách
  $\mathcal{A}$ je uzavřená $\Rightarrow \vec{x_0} \in \mathcal{A}$.

□

VĚTA 7.8 (SPOJITÝ OBRAZ KOMPAKTU.) Nechť $\mathcal{K} \subset \mathcal{X}$ je kompaktní, $F : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ spojité. Potom $F(\mathcal{K})$ je kompaktní.

DŮKAZ VĚTY 7.8 $\{y_n\} \subset F(\mathcal{K})$, tj. $\exists \{x_n\} \subset \mathcal{K} \ldots F(x_n) = y_n$.
$\mathcal{K}$ je kompakt $\Rightarrow \exists\{x'_n\} \in \{x_n\}$; $x'_n \to x_0 \in \mathcal{K}$.
Potom $y'_n = F(x'_n)$ je vybraná z $\{y_n\}$.
Spojitost $F : x'_n \to x_0 \Rightarrow F(x'_n) = y'_n \to F(x_0) \in F(\mathcal{K})$.
(jestliže $\{x_{n_k}\}$ je vybraná … y_{n_k}; $y_{n_k} = F(x_{n_k})$)

□

LEMMA 7.3 Nechť $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$ kompakt. Potom $\mathcal{A}$ obsahuje největší a nejmenší prvek.

DŮKAZ LEMMATU 7.3 $\mathcal{A}$ má nejmenší prvek: $\alpha := \inf \mathcal{A}$; $\mathcal{A}$ je kompakt $\Rightarrow$ je omezená: $\alpha \in \mathbb{R}$. Cíl: $\alpha \in \mathcal{A}$.
$n \in \mathbb{N}$ dáno: $\exists x_n \in \mathcal{A}\ \alpha \leq x_n < \alpha + \frac{1}{n}$ ... 2. vlastnost infima
Pak $x_n \to \alpha$, $\mathcal{A}$ je uzavřená: $\alpha \in \mathcal{A}$.

□

LEMMA 7.0 TVRZENÍ:

$F : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ spojitá funkce, $\mathcal{K} \subset \mathcal{X}$ je kompaktní. Pak F nabývá $\mathcal{K}$ maxima a minima.

tj. $(\exists a \in \mathcal{K})\,(\forall x \in \mathcal{K})\,[F(x) \leq F(a)]$,
$(\exists b \in \mathcal{K})\,(\forall x \in \mathcal{K})\,[F(x) \geq F(b)]$.

DŮKAZ LEMMATU 7.0 Věta 7.8 : $F(\mathcal{K}) \subset \mathbb{R}$ je kompaktní.

Věta 7.3 : $\exists \alpha \in F(\mathcal{K})$ největší

stačí volit $a \in F^{-1}(\{\alpha\})$ libovolně.

□

POZNÁMKA 7.15 Věta: $\mathcal{I} = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ spojitá, pak f nabývá v $\mathcal{I}$ maxima a minima. Je speciálním případem předchozích vět.

VĚTA I (CHARAKTERIZACE KOMPAKTNOSTI.) Nechť $\mathcal{M} \subset \mathcal{X}$. Pak je ekvivalentní:

1. $\mathcal{M}$ je kompaktní
2. Je-li $\{\mathcal{G}_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ systém otevřených podmnožin, $\mathcal{M} \subset \cup_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathcal{G}_\alpha$, pak existuje konečný podsystém $\{\mathcal{G}_{\alpha_i}\}_{i=1}^n \subset \{\mathcal{G}_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ tak, že $\mathcal{M} \subset \cup_{i=1}^n \mathcal{G}_{\alpha_i}$.

DŮKAZ VĚTY I Bez důkazu.

□

VĚTA 7.9 Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ je otevřená, konvexní, nechť $F(\vec{x}) : \Omega \to \mathbb{R}$ je spojitá, parciální derivace jsou spojité v Ω. Nechť $\exists L > 0$: $||\nabla F(\vec{x})|| < L\ \forall x \in \Omega$. Potom $F(\vec{x})$ je lipschitzovská s konstantou L.

DŮKAZ VĚTY 7.9 Zvolme $\vec{x}, \vec{y} \in \Omega$ libovolně. Dk. předpokládá existenci $\mathrm{D}F(\vec{x})\ \forall x \in \Omega$, tedy též na spojnici bodů $\vec{x}, \vec{y}$.
Z věty o střední hodnotě (Věta 6.5):
$\exists c : F(\vec{x}) - F(\vec{y}) = \nabla F(\vec{c}) \cdot (\vec{x} - \vec{y})$
$|F(\vec{x}) - F(\vec{y})| \leq \underbrace{||\nabla F(\vec{c})||}_{L} \cdot ||\vec{x} - \vec{y}|| \leq L \cdot ||\vec{x} - \vec{y}||$

speciálně: $p = 1$: $f(x) : (a, b) \to \mathbb{R}, |f'(x)| \leq L \Rightarrow f(x)$ je lipschitzovská s konstantou L.

□

LEMMA 7.4 Nechť $||\cdot||_*$ je libovolná pevná norma v $\mathbb{R}^p$. Pak existují $c_1, c_2 > 0$:

$$c_1||\vec{x}||_1 \leq ||\vec{x}||_* \leq c_2||\vec{x}||_1 \; \forall x \in \mathbb{R}^p : ||\vec{x}||_1 = \sum_{i=1}^{p} |x_i|,$$

kde $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_p)$.

DŮKAZ LEMMATU 7.4 $||\vec{x}||_* \leq c_2||\vec{x}||_1$
$\vec{x} = \sum_{i=1}^{p} x_i\vec{e}_i, e_i = (0, \ldots, \underbrace{1}_{\uparrow i}, 0, \ldots, 0)$
$||\vec{x}||_* = ||\sum_{i=1}^{p} x_i\vec{e}_i||_* \leq \sum_{i=1}^{p} |x_i|||\vec{e}_i||_* \leq c_2 \cdot ||\vec{x}||_1$
$c_2 := \max\{||\vec{e}_i||_*, i = 1, \ldots, p\}$
$c_1||\vec{x}||_1 \leq ||\vec{x}||_*$
definjme zobrazení $\varphi : (\mathbb{R}^p, ||\cdot||_1) \to \mathbb{R}, \; \vec{x} \mapsto ||\vec{x}||_*$

φ je lipschitzovská s $L = c_2$:
$|\varphi(\vec{x}) - \varphi(\vec{y})| = |||\vec{x}||_* - ||\vec{y}||_*| \leq ||\vec{x} - \vec{y}||_* \leq c_2||\vec{x} - \vec{y}||_1$

$S = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^p : ||\vec{x}||_1 = 1\} \subset (\mathbb{R}^p, ||\cdot||_1)$ je kompaktní.
je omezená a uzavřená.
$\psi : (\mathbb{R}^p, ||\cdot||_1) \to \mathbb{R}, \; \vec{x} \mapsto ||\vec{x}||_1$ je spojité (1-lipschitzovská)
$S = \psi^{-1}(\{1\}) \ldots$ uzavřená množina
$S = \mathbb{R}^p \diagdown (\psi^{-1}(\mathbb{R} \diagdown \{1\}))$ uzavřená.
φ nabývá na S minima: označme ho c_1 (bude > 0)
$c_1||\vec{x}||_1 \leq ||\vec{x}||_* \; \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^p$:
$||\vec{x}||_1 = 1 \ldots$ OK
$\vec{x} = 0 \ldots$ OK
jinak $\vec{y} = \frac{\vec{x}}{||\vec{x}||_1}$ a platí $\vec{y} \in S$
$c_1||\frac{x}{||\vec{x}||_1}|| \leq ||\frac{x}{||\vec{x}||_1}||_*$ krátím, jsou to skaláry.

□

POZNÁMKA 7.16 <u>DŮSLEDKY:</u>

- $\{\vec{x_n}\} \subset \mathbb{R}^p, \; ||\vec{x_n}||_* \to 0 \Leftrightarrow ||\vec{x_n}||_1 \to 0 \ldots$ ekvivalence při konvergenci
- zachování otevřenosti (nezávisí na normě)

$$\mathcal{U}_1\left(\vec{x_0}, \frac{\varepsilon}{c_2}\right) \subset \mathcal{U}_*(x_0, \varepsilon)$$

z první nerovnosti:

$$||\vec{x} - \vec{x_0}||_1 < \frac{\varepsilon}{c_2} \Rightarrow ||\vec{x} - \vec{x_0}||_* < \varepsilon$$

$$\mathcal{U}_*(x_0, c_1\varepsilon) \subset \mathcal{U}_1(\vec{x_0}, \varepsilon)$$

(z druhé nerovnosti)

DEFINICE 7.18 (IZOMETRIE.) $(\mathcal{X},\rho)\,,(\mathcal{Y},\sigma)$ jsou metrické prostory. Zobrazení $F:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ se nazve IZOMETRIE, pokud $\rho(x,y)=\sigma\left(F(x),F(y)\right)\ \forall x,y\in\mathcal{X}$.

PŘÍKLAD 7.9 $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{C},\ (x,y)\mapsto x+iy$
norma: $\sqrt{x^2+y^2}\equiv\sqrt{\mathrm{Re}^2+\mathrm{Re}^2}$
izometrie = ztotožnění metrický prostor

DEFINICE 7.19 (KONVEXNÍ MNOŽINA.) Nechť $\mathcal{X}$ lineární vektorový prostor nad $\mathbb{R}$. Množina $\mathcal{M}\subset\mathcal{X}$ se nazve KONVEXNÍ, pokud

$$(\forall x,y\in\mathcal{M})\,(\forall\lambda\in[0,1])\,[\underbrace{\lambda x+(1-\lambda)y}_{y+\lambda(x-y)}\in\mathcal{M}]$$

DEFINICE 7.20 (ÚSEČKA.) Množina $\langle a;b\rangle=\{\lambda a+(1-\lambda)b;\lambda\in[0,1]\}$ nazvu ÚSEČKOU s krajními body a a b (spojnice a,b).

POZNÁMKA 7.17 Nelze zavést v obecném metrickém prostoru (v metrickém prostoru nelze sčítat a násobit číslem).

DEFINICE 7.21 (BOLZANO-CAUCHY PODMÍNKA.) Posloupnost $\{x_n\}\subset\mathcal{X}$ se nazve CAUCHYOVSKÁ, pokud

$$(\forall\varepsilon>0)\,(\exists n_0\in\mathbb{N})\,[m,n\geq n_0\Rightarrow\rho(x_n,x_m)<\varepsilon].$$

LEMMA 7.5 Konvergentní posloupnost je cauchyovská.

DŮKAZ LEMMATU 7.5 $\{x_n\}\subset\mathcal{X}$ konvergentní: $x_n\to x_0\in\mathcal{X}$.
$\varepsilon>0$ dáno: $\frac{\varepsilon}{2}>0\ \ldots\ \exists n_0;\ n\geq n_0:\rho(x_n,x_0)<\frac{\varepsilon}{2}$
$m,n\geq n_0:\rho(x_n,x_m)\leq\underbrace{\rho(x_n,x_0)}_{<\frac{\varepsilon}{2}}+\underbrace{\rho(x_0,x_m)}_{<\frac{\varepsilon}{2}}$

□

DEFINICE 7.22 (ÚPLNÝ METRICKÝ PROSTOR.) Metrický prostor se nazve úplný, pokud každá cauchyovská posloupnost $\{x_n\}\subset\mathcal{X}$ má v $\mathcal{X}$ limitu.

PŘÍKLAD 7.10

1. $(\mathbb{R},|\cdot|)$ je úplný [1. semestr]
2. $(\mathbb{C},|\cdot|)$ je úplný [3. kapitola]
3. $(\mathbb{Q},|\cdot|)$ není úplný: $S_n:=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$, zřejmě $\{S_n\}\subset\mathbb{Q}$ a je cauchyovská $\Rightarrow$ má limitu, ale obec. v $\mathbb{R}$
$$S_n\to\mathrm{e}\notin\mathbb{Q}.$$

POZNÁMKA 7.18 $\mathcal{X}$ je úplný: „nemá díry“.

„$\mathbb{R}$ je úplný“ je ekvivalentní „axiom o supremu“.

VĚTA 7.10 $\mathbb{R}^p$ je úplný prostor.

DŮKAZ VĚTY 7.10 Po složkách. $\{x^n\} \subset \mathbb{R}^p$ je cauchyovská. $\vec{x^n} = (x_1^n, x_2^n, \dots, x_p^n)$
Klíčové pozorování: $|x_i^n - x_i^m| \leq ||\vec{x^n} - \vec{x^m}||_2$, tj. $\forall i = 1, \dots, p : \{x_i\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \Rightarrow \vec{x^n} \to \vec{x^0} = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_p^0)$.

□

VĚTA 7.11 Nechť $\mathcal{X}$ je úplný, $\mathcal{M} \subset \mathcal{X}$ je uzavřený. Potom $\mathcal{M}$ je úplný prostor.

DŮKAZ VĚTY 7.11 $\{x_n\} \subset \mathcal{M}$ cauchyovská. Cíl: $x_n \to x_0 \in \mathcal{M}$.
$\{x_n\} \subset \mathcal{X}$ je cauchyovská $\Rightarrow$ (úplnost $\mathcal{X}$) $\Rightarrow x_n \to x_0 \in \mathcal{X}$.
$x_n \in \mathcal{M}$ ... uzavřená $\Rightarrow$ Věta 7.6 $\Rightarrow x_0 \in \mathcal{M}$.

□

POZNÁMKA 7.19 Věta říká: úplnost je uzavřená dědičná vlastnost.

POZNÁMKA 7.20 Uzavřenost je podstatná: viz $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

VĚTA 7.12 Nechť $\mathcal{X}$ je komplaktní. Pak $\mathcal{X}$ je úplný.

DŮKAZ VĚTY 7.12 $\{x_n\} \subset \mathcal{X}$ je cauchyovská. $\mathcal{X}$ je kompaktní $\Rightarrow \exists x_0 \in \mathcal{X}$ hromadný bod. Cíl: $x_n \to x_0$.
$\varepsilon > 0$ dáno: $\frac{\varepsilon}{2} > 0 \dots \exists n_0 \in \mathbb{N}$: $m, n \geq n_0$: $\rho(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ (Bolzano-Cauchy)
$\exists \tilde{n} \geq n_0 : \rho(x_{\tilde{n}}, x_0)\frac{\varepsilon}{2}$
Nechť $n \geq n_0$: $\rho(x_n, x_0) \leq \underbrace{\rho(x_n, x_{\tilde{n}})}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\rho(x_{\tilde{n}}, x_0)}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$

□

VĚTA 7.13 (<u>BANACHOVA VĚTA O KONTRAKCI.</u>) Nechť $\mathcal{X}$ je úplný prostor a nechť $F : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ je kontrakce. Potom existuje jediný $x_0 \in \mathcal{X}$ tak, že $F(x_0) = x_0$.

POZNÁMKA 7.21 x_0 se nazývá pevný bod F.

kontrakce: $\exists a \in (0, 1) : \rho(F(x), F(y)) \leq a \cdot \rho(x, y)$

POZNÁMKA 7.22 <u>BANACHOVA VĚTA:</u> vždy existuje právě 1 bod tak, že obraz na mapě se kryje se skutečnou polohou. a = měřítko mapy.

DŮKAZ VĚTY 7.13 Zvol $x_1 \in \mathcal{X}$ libovolně. $x_{n+1} := F(x_n)\ \forall n \in \mathbb{N}$.
Tvrdím: $\{x_n\} \subset \mathcal{X}$ je cauchyovská.
$\rho(x_3, y_2) = \rho(F(x_2), F(x_1)) \leq a \cdot \rho(x_3, x_2) \leq a^2 \rho(x_2, x_1)$.
<u>Indukcí:</u> $n \geq 2 : \rho(x_n, x_{n-1}) \leq a^{n-a} \cdot \rho(x_2, x_1)$ $(*)$
Nechť $m, n \geq n_0 \geq 2$; BÚNO $m \geq n$, n_0 určím později.
$\rho(x_m, x_n) \leq \rho(x_m, x_{n-1}) + \rho(x_{m-1}, x_{m-2}) + \dots + \rho(x_{n+1}, x_n) = \sum_{k=1}^{m-n} \rho(x_{n+k}, x_{n+k-1}) \leq$

$$(*) \leq \sum_{t=1}^{m-n} a^{m+k-2} \cdot \rho(x_2, x_1) = \underbrace{a^{n-2}}_{\leq a^{n_0-2}} \underbrace{\rho(x_2, x_1)}_{\text{nechám}} \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{m-n} a^k}_{\leq \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1}{1-a}} \quad , a \in (0,1)$$

$\rho(x_m, x_n) \leq \frac{\rho(x_2,x_1)}{1-a} \cdot \frac{1}{a^2} \cdot a^{n_0} = \mathcal{I}(n_0)$
$\varepsilon > 0$ dáno: zvol $n_0 \in \mathbb{N}$: $\mathcal{I}(n_0) < \varepsilon$.
$\{x_n\} \subset \mathcal{X}$ Cauchy & $\mathcal{X}$ úplný $\Rightarrow x_n \to x_0 \in \mathcal{X}$ & $x_{n+1} \to x_0$
$\underbrace{x_{n+1}}_{\to x_0} = \underbrace{F(x_n)}_{F(x_0)}$ spojitost F (kontrakce je spojitá)
jednoznačnost: sporem: $x_0, y_0 \ldots$ dva pevné body
$\rho(x_0, y_0) > 0$ lze krátit
$1 \leq a$ Spor!!!

$\square$

Poznámka 7.23

- víme: na $\mathbb{R}^p$ jsou všechny normy ekvivalentní
- obecněji na konečně-dimenzionálním normovaném prostoru jsou všechny normy ekvivalentní: topologicky ... konvergence, uzávěr, úplnost, ...
  nikoliv: geometricky: vzdálenost, nejbližší bod.
- v prostorech $\infty-$dimenzionálním nejsou obecně dvě normy ekvivalentní (např. co do konvergence) $\mathcal{X} = \mathcal{C}([a,b])$ $||f||_1 = (\mathcal{R}) \int_a^b |f(x)| \mathrm{d}x$
  $||f||_\infty \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$
  platí: $||f||_1 \leq (b-a)||f||_\infty$
  konvergence vůči $||\cdot||_\infty \Rightarrow$ kovergentní vůči $||\cdot||_1$ normě.

  Ne obráceně!!!

Rejstřík