Písemka z MF2 (MAF004) ze dne 7.7.2004

Příklad 1. Určete plošný obsah útvaru

$$(x^2 + y^2)^{3/2} + z = 1, \quad z > 0$$

Příklad 2. Pomocí residuové věty spočítejte

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 x}{1 + \sin^2 x}\, dx$$

Příklad 3. Nechť $f(x)$ je 2π-periodická a $f(x) = \cosh^x$ pro $x \in [-\pi, \pi]$.
a] najděte $\mathcal{F}_f(x)$
b] nakreslete grafz $f(x), \mathcal{F}_f(x)$ a řekněte, v čem se liší. Zdůvodněte.
c] Parsevalova rovnost
Vzorečky:

$$\cosh^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cosh 2x), \qquad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

Příklad 4. Pomocí Laplaceovy transformace řešte rovnici

$$x(t) + 4\int_0^t (t - s)x(s)\, ds = t^3, \quad t \geq 0$$

(Bez zkoušky.)

<u>Řešení:</u>

Řešení příkladu 1.

$$(\varphi, \Omega) = \begin{array}{ll} x = r\cos u & r \in (0, 1) \\ y = r\sin u & u \in (0, 2\pi) \\ z = 1 - r^3 & \end{array}$$

$$S = \int_\Omega r\sqrt{1 + 9r^4}\, dudr = \ldots = \frac{\pi}{3}\int_0^3 \sqrt{1 + u^2}\, du = \text{per partes pomocí substituce } shx = \ldots =$$

$$= \frac{\pi}{6}[3\sqrt{10} + \text{argsinh } 3]$$

Řešení příkladu 2.

$$I = 2\pi i \ \text{res}_{|z|<1} f(z)$$

$$f(z) = \frac{\left[\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right]^2}{1 + \left[\frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right]^2} \frac{1}{iz} = \frac{(z^2 + 1)^2}{4z^2 - (z^2 - 1)^2} \frac{1}{iz}$$

Substituce $z^2 = y \ldots y = 3 \pm 2\sqrt{2}$

- $z_0 = 0$ jednoduchý pól, residuum $= i$
- $z_0 = \pm\sqrt{3-2\sqrt{2}}$, residua jsou stejně velká, mají hodnotu $= \frac{3-\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-4}$

$$I = 2\pi\left(2 \cdot \frac{3-\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-4} - 1\right)$$

Řešení příkladu 3. Fourierova řada:

$$\cosh^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cosh 2x$$

$$g(x) = \cosh 2x, \quad a_0 = \frac{1}{\pi}\sinh 2\pi, \quad a_k = \frac{(-4)^k}{\pi(4+k^2)}$$

$$\mathcal{F}_g(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi}\sinh 2\pi + \sum_k \frac{(-2)^k}{\pi(4+k^2)}\cos kx$$

Grafy: stejné, fce je spojitá a po částech C^1.

Řešení příkladu 4.

$$x(t) + 4x(t) * t = t^3$$

$$F(p) + F(p)\frac{4}{p^2} = \frac{6}{p^4}$$

$$F(p) = \frac{6}{p^2(p^2+4)}$$

$$x(t) = \sum res\ \{e^{tp} \cdot F(p)\}$$

Singularity: 0 (residuum$=\frac{3}{2}t$), $\pm 2i$ (residua jsou komplexně sdružená, residuum$=-\frac{3}{8}\sin 2t \mp \frac{3}{8}i\cos 2t$)

Výsledek:

$$x(t) = \frac{3}{2}t - \frac{3}{4}\sin 2t$$