4 Mechanika kontinua

Tenzor napětí a deformace, Hookův zákon, vlny v kontinuu. Pohybová rovnice ideální tekutiny, Bernoulliova rovnice. Viskózní tekutiny, Navierovy-Stokesovy rovnice, laminární a turbulentní proudění.

4.1 Tenzor deformace

Pro popis kapalin, plynů a pro vyšetřování mechanických dějů, při kterých se mění vzájemná vzdálenost bodů pevné látky, je vhodné zavést představu **kontinua** – spojitého prostředí. Kontinuum lze popisovat **Lagrangeovým popisem**, kdy sledujeme, jak se původní oblast po určité době deformuje, nebo **Eulerovým popisem**, kdy měříme okamžitou rychlost každé částice, která kolem proudí.

Kontinuum budeme popisovat souřadnicemi částic y_j

$$y_j = y_j(x_i) = x_j + u_j(x_i), \tag{1}$$

které jsou závislé na počáteční poloze x_i. Vzdálenost mezi koncovou a počáteční polohou určíme z posunutí u_j.

Tyto rovnice mají v sobě zahrnutou část, která popisuje translaci a rotaci kontinua jako celku, a deformační část. Abychom z rovnic izolovali deformační část, je vhodné spočítat

$$\mathrm{d}y_j\,\mathrm{d}y_j = (\,\mathrm{d}x_j + \frac{\partial u_j}{\partial x_l}\,\mathrm{d}x_l)(\,\mathrm{d}x_j + \frac{\partial u_j}{\partial x_k}\,\mathrm{d}x_k) = (\delta_{jl} + \frac{\partial u_j}{\partial x_l})(\delta_{jk} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k})\,\mathrm{d}x_l\,\mathrm{d}x_k$$

neboli

$$\mathrm{d}y_j\,\mathrm{d}y_j - \mathrm{d}x_j\,\mathrm{d}x_j = \Big(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_j}{\partial x_l}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\Big)\,\mathrm{d}x_l\,\mathrm{d}x_k \equiv 2E_{lk}\,\mathrm{d}x_l\,\mathrm{d}x_k. \tag{2}$$

Posledním vztahem je zaveden symetrický **tenzor velkých deformací**. Pokud jsou deformace malé, nabývají malých hodnot i parciální derivace součin parciálních derivací lze zanedbat. Potom je k popisu deformace postačující **tenzor malých deformací**

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big). \tag{3}$$

U tenzoru velkých deformací je nutné rozlišovat, jestli je vyjádřen vůči deformovanému nebo nedeformavanému stavu; u tenzoru malých deformací můžeme v dobrém přiblížení předpokládat, že oba tyto tenzory (tj. $\epsilon_{ij}(x_i)$ a $\epsilon_{ij}(y_j)$) jsou stejné.

Diagonální složky tenzoru malých deformací značí relativní změnu délky elementu, který byl původně rovnoběžný s danou osou

$$\epsilon_{11} = \frac{l_x - l_{0x}}{l_x}. \tag{4}$$

Smíšená složka tenzoru malých deformací

$$\epsilon_{12} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \tag{5}$$

odpovídá polovině úhlu, o který se změní původně pravý úhel mezi elementy původně rovnoběžnými s osou x a y – tzv. **úhel smyku**. Podobně složka ϵ_{13} (ϵ_{23}) je rovna polovičnímu úhlu smyku mezi osou x a z (y a z).

4.2 Tenzor napětí

Napětí můžeme také popisovat symetrickým tenzorem II. řádu. Uvažujme napětí působící na plochu kolmou k ose x. Toto napětí můžeme popsat pomocí tří složek

$$\vec{T_1} = (\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{13}). \tag{6}$$

První složka je čistě tahová (popř. tlaková pro $\tau_{11} < 0$), další dvě složky jsou smykové a popisují smyk rovnoběžný s osou y a z. Provedeme-li tuto úvahu i napětí působící na plochu kolmou k ose y a k ose z, dostaneme devět hodnot τ_{ij}, které tvoří **tenzor napětí**.

Napětí na libovolné plošce procházející daným bodem pak můžeme vyjádřit jako ($\vec{\nu}$ je normála plošky)

$$T_i = \sum_{i=1}^{3} \tau_{ji}\nu_j. \tag{7}$$

4.3 Hookův zákon

Předpoklad přímé úměrnosti mezi napětím a deformací vyjadřuje **Hookův zákon**

$$\tau_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl}. \tag{8}$$

Elastické koeficienty uspořádané do tenzoru čtvrtého řádu vystihují elastické chování látek. Nejobecněji (u trojklonných krystalů) má tento tenzor 21 nezávislých složek, u izotropních těles se tento počet redukuje na dva. Pro popis izotropních těles se volí buď **Laméovy koeficienty** λ, μ, nebo moduly pružnosti v tahu a smyku E a G. Potom můžeme napsat Hookův zákon ve tvaru (první člen popisuje objemovou deformaci a druhý tvarovou)

$$\tau_{ij} = \lambda\delta_{ij}\mathrm{Tr}\{\epsilon_{ij}\} + 2\mu\epsilon_{ij} \tag{9}$$

nebo

$$\tau_{ij} = \frac{G(E-2G)}{3G-E}\delta_{ij}\mathrm{Tr}\{\epsilon_{ij}\} + 2G\epsilon_{ij}. \tag{10}$$

Ve speciálním případě čistého tahu můžeme napsat Hookův zákon ve tvaru

$$\tau_{11} = E\epsilon_{11} = \frac{\Delta l}{l_0} \tag{11}$$

a v případě čistého smyku

$$\tau_{12} = 2\mu\epsilon_{12} = G\gamma. \tag{12}$$

V případě všestranného čistého tlaku dojde k poměrnému zmenšení objemu

$$\tau_{tlak} = \frac{1}{k}\frac{\Delta V}{V_0}, \qquad \text{kde} \quad k = 3\Big(\frac{1-2\mu}{E}\Big). \tag{13}$$

4.4 Vlny v kontinuu

Tak jako periodickou změnu v čase nazýváme kmity, periodickou změnu v prostoru nazýváme vlny.

Zvuk je mechanické vlnění, postupné zhušťování a zřeďování vzduchu, o frekvenci přibližně 16 Hz – 16 kHz.

Rozdělíme-li síly na plošné a objemové (např. gravitace), můžeme pro plošné síly použít Gaussovu větu a dostaneme obecnou pohybovou rovnici

$$F_i + \frac{\partial\tau_{ij}}{\partial x_j} = \rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}. \tag{14}$$

Pokud použijeme Hookův zákon pro izotropní těleso, dostaneme vlnovou rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \tag{15}$$

V kontinuu se tedy může šířit rozruch ve formě vlnění (existují 2 příčné a 1 podélná vlna). V **příčném vlnění** ($v^2 = \frac{\mu}{\rho}$) kmitají jednotlivé body kolmo na směr, ve kterém vlnění postupuje (příkladem jsou kruhy na vodní hladině), v **podélném vlnění** ($v^2 = \frac{1+2\lambda}{\rho}$) kmitají ve směru, ve kterém vlnění postupuje (příkladem je zvuk). V kapalinách a plynech existuje pouze se šíří pouze podélné vlnění.

Kromě výše popsaného postupného vlnění existuje i vlnění stojaté, kdy se prostorem nešíří energie.

4.5 Eulerův popis

Při popisu chování tekutin je vhodné přejít od Lagrangeova popisu k Eulerovu, tj. stav kontinua budeme popisovat okamžitou rychlostí. V Eulerově popisu můžeme napsat Hookův zákon ve tvaru

$$\tau_{ij} = -p\,\delta_{ij} + \lambda\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij} + \mu\Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\Big). \tag{16}$$

Druhý člen odpovídá změně objemu (stlačení), třetí deformaci tvaru (u tekutin souvisí s viskozitou).

Zrychlení vyjádřené pomocí Eulerova popisu má tvar

$$a_i = \frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t} = \Big(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\Big). \tag{17}$$

4.6 Rovnice kontinuity

Zákon zachování hmotnosti lze v případě tekutiny vyjádřit ve tvaru rovnice kontinuity

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{v}) = 0, \tag{18}$$

popř. ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho\nabla\cdot\vec{v} = 0. \tag{19}$$

4.7 Pohybová rovnice ideální tekutiny

V Eulerově popisu mohu napsat pohybovou rovnici kontinua jako

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + F_i = \rho\Big(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\Big). \tag{20}$$

U popisu **ideální tekutiny** předpokládáme, že neexistuje viskozita ($\mu = 0$) – tekutina se nebrání změně tvaru, ale je dokonale nestlačitelná

$$\tau_{ij} = -p\,\delta_{ij}. \tag{21}$$

Pohybovou rovnici ideální tekutiny pak můžeme napsat ve tvaru ($\vec{f}$ je objemová síla na jednotku hmotnosti)

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla\Big(\frac{\vec{v}^2}{2}\Big) - \vec{v}\times(\nabla\times\vec{v}) = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{f} \tag{22}$$

4.8 Bernoulliova rovnice

Nyní se omezíme na případ, že proudění je stacionární $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$ a nevířivé $\nabla \times \vec{v} = 0$. Objemovou sílu vyjádříme pomocí potenciálu a předpokládáme, že tekutina je **barotropní** $\rho = \rho(p)$. Potom mohu pohybovou rovnici přepsat

$$\nabla\Big(\frac{\vec{v}^2}{2}\Big) + \nabla\frac{p}{\rho} + \nabla U = 0 \tag{23}$$

a určit první integrál pohybové rovnice („zákon zachování mechanické energie“)

$$\frac{\vec{v}^2}{2} + U + P = \text{konst.}, \qquad \text{kde} \quad P = \int_{p_0}^{p} \frac{\mathrm{d}p'}{\rho(p')}, \tag{24}$$

tzv. **Bernoullivou rovnici**.

4.9 Navierova-Stokesova rovnice

U reálných tekutin nemůžeme předpokládat, že napětí má pouze charakter tlaku. Pohybují-li se dvě vrstvy tekutiny různou rychlostí, vzniká mezi nimi smykové tření.

Popisuji-li ideální tekutinu, pokládám obyčejně okrajová podmínku $v_n = 0$ („nevytéká ven“). Pro vazkou tekutinu však platí okrajová podmínka $\vec{v} = 0$; ideální tekutina tedy není ani přiblížení pro malou vazkost, tento popis můžeme používat pouze dál od stěn.

Pro vazkou tekutinu musím použít obecnější vyjádření napětí

$$\tau_{ij} = -p\,\delta_{ij} + \mu\Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\Big) \tag{25}$$

(stále předpokládám nestlačitelnost). Potom dostanu pohybovou rovnici pro proudění viskózní tekutiny

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \eta\triangle\vec{v} + \vec{F} \tag{26}$$

zvanou **Navierova-Stokesova rovnice**. Veličina

$$\eta = \frac{\mu}{\rho} \tag{27}$$

se nazývá **kinematická viskozita.**

4.10 Laminární a turbulentní proudění

Jednodušším případem proudění je **proudění laminární**, kdy nedochází k míšení tekutiny mezi jednotlivými vrstvami. V opačném případě se jedná o **turbulentní proudění** – tekutina se začne v různých vrstvách promíchávat, rychlost v jednotlivých místech trubice kolísá s časem, její složka do směru kolmého k ose trubice není vždy rovna nule, dochází k porušení spojitého rozložení tekutiny v trubici a vznikají víry.

Zda se jedná o laminární nebo turbulentní proudění nám pomáhá rozlišit bezrozměrná veličina zvaná **Reynoldsovo číslo**

$$Re = \frac{vr}{\eta} \tag{28}$$

(r je poloměr trubice). Za kritickou hodnotu, kdy se proudění mění v turbulentní, je považována hodnota Reynoldsova čísla $Re = 1000 - 2000$.