7 Základní elektromagnetické veličiny a jejich měření

Intenzity elektrického a magnetického pole, elektrická a magnetická indukce. Materiálové vztahy. Měrné metody elektrických a magnetických veličin.

7.1 Intenzita elektrického pole

Pro popis silového působení mezi nabitými tělesy je vhodné zavést abstrakce **bodového náboje** – analogii hmotného bodu v mechanice. Mezi dvěma bodovými nepohybujícími se náboji působí síla daná vztahem

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|r_1 - r_2|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \tag{1}$$

zvaným **Coulombův zákon**.

Intenzita elektrického pole charakterizuje pole vyvolané nábojem

$$q = \int_V \rho(\vec{r})\, \mathrm{d}V. \tag{2}$$

Uvažujeme-li soustavu N bodových nábojů ve vakuu, můžeme jejich silové působení na náboj q napsat ve tvaru

$$\vec{F} = q\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}), \qquad \text{kde} \quad \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{|r - r_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i). \tag{3}$$

Speciálně pro bodový náboj umístěný v počátku soustavy souřadnic můžeme psát elektrickou intenzitu ve tvaru

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^3} \vec{r}, \tag{4}$$

odkud lze očekávat, že pro spojitě rozložený náboj můžeme elektrickou intenzitu spočítat podle

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|r - r'|^3} (\vec{r} - \vec{r}')\, \mathrm{d}^3 r'. \tag{5}$$

K získání názorné představy o průběhu pole používáme **siločáry** – křivky, v jejichž každém bodě má vektor intenzity směr tečny. Siločáry vždy vystupují z kladných nábojů a vstupují do záporných; nemůžou se protínat.

Pro tok vektoru intenzity uzavřenou plochou můžeme formulovat **Gaussův zákon elektrostatiky**: *Celkový tok intenzity elektrostatického pole soustavy bodových nábojů libovolnou uzavřenou plochou je roven celkovému náboji uzavřenému uvnitř této plochy dělenému konstantou permitivity*, neboli

$$\oint \vec{\mathcal{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q_c}{\varepsilon_0}, \qquad \text{resp.} \quad \nabla \cdot \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} \tag{6}$$

v integrálním resp. diferenciálním tvaru.

Obecnou vlastnost, nevírovost, elektrického pole vyjadřuje rovnice

$$\oint_l \vec{\mathcal{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0, \qquad \text{resp.} \quad \nabla \times \mathcal{E} = 0. \tag{7}$$

Elektrické pole je potenciální.

Při průchodu plochou nespojitosti zůstávají spojité pouze tečné složky vektoru intenzity elektrického pole. Normálové složky se mění skokově; skok je úměrný náboji na ploše nespojitosti:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{1t} - \mathcal{E}_{2t} &= 0 \\ \mathcal{E}_{1n} - \mathcal{E}_{2n} &= \tfrac{\sigma}{\varepsilon_0} \end{aligned} \tag{8}$$

7.2 Indukce magnetického pole

Pokud se bodový náboj pohybuje rychlostí v v blízkosti vodičů s proudem nebo zmagnetovaných těles, celková síla působící na náboj je dána **Lorentzovým vzorcem**

$$\vec{F} = q(\vec{\mathcal{E}} + \vec{v} \times \vec{\mathcal{B}}). \tag{9}$$

Tento vztah zavádí **magnetickou indukci** $\vec{\mathcal{B}}$, veličinu charakterizující magnetické pole.

Je-li elektrické pole nulové a budeme-li místo jediného zkušebního náboje uvažovat působení na libovolný proud popsaná proudovou hustotou $\vec{j}(\vec{r})$, dostaneme pro hustotu síly vzorec

$$\vec{f} = \vec{j} \times \vec{\mathcal{B}}. \tag{10}$$

Pro libovolné magnetické pole platí **Ampèrův zákon** pro cirkulaci magnetické indukce: *křivkový integrál magnetické indukce počítaný přes libovolnou uzavřenou křivku je vždy roven proudu, který protéká plochou ohraničenou touto křivkou, násobenému permeabilitou*

$$\oint_l \vec{\mathcal{B}} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I, \qquad \text{resp.} \quad \nabla \times \vec{\mathcal{B}} = \mu_0 \vec{j}. \tag{11}$$

Magnetické pole tedy obecně není potenciální.

Na druhou stranu tok magnetického pole je vždy nulový:

$$\oint_S \vec{\mathcal{B}} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0, \qquad \text{resp.} \quad \nabla \cdot \vec{\mathcal{B}} = 0. \tag{12}$$

Pro obecné rozložení proudové hustoty lze magnetickou indukci určit podle **Biotova-Savartova zákona**

$$\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|r - r'|^3} \, \mathrm{d}^3 r', \tag{13}$$

který je ekvivalentní Ampèrově vzorci.

Normálové složky vektoru magnetické indukci zůstávají při průchodu plochou nespojitosti spojité. Tečné složky se mění skokově; skok je úměrný hustotě proudu tekoucího na ploše nespojitosti:

$$\begin{aligned} B_{1n} - B_{2n} &= 0 \\ B_{1t} - B_{2t} &= \mu_o j_S \end{aligned} \tag{14}$$

7.3 Indukce elektrického pole

Pro vyšetřování vlastností pole v přítomnosti dielektrika zavádíme elektrickou indukci

$$\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}) = \varepsilon_0 \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) + \vec{\mathcal{P}}(\vec{r}). \tag{15}$$

Vektor polarizace $\mathcal{P}$ popisuje elektrické vlastnosti dielektrika; je zadán rozložením nábojů vázaných v dielektriku

$$q_p = -\nabla \cdot \vec{\mathcal{P}}. \tag{16}$$

Potom můžeme Gaussův zákon elektrostatického pole v dielektriku napsat pouze pomocí volných nábojů

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{D}} = \rho, \quad \nabla \times \vec{\mathcal{E}} = 0. \tag{17}$$

Při průchodu plochou nespojitosti je vektor elektrické indukce nespojitý; nespojitost je dána plošnou hustotou volných nábojů

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma. \tag{18}$$

7.4 Intenzita magnetického pole

Magnetické vlastnosti látek určují vázané proudy popsané magnetizací

$$\vec{j}_v(\vec{r}) = \nabla \times \vec{\mathcal{M}}. \tag{19}$$

Magnetické pole v látkovém prostředí potom popisujeme vektorem intenzity magnetického pole

$$\vec{\mathcal{H}} = \frac{1}{\mu_0}\vec{\mathcal{B}} - \vec{\mathcal{M}} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\mathcal{B}} = \mu_0\vec{\mathcal{H}} + \mu_0\vec{\mathcal{M}} = \mu_0\vec{\mathcal{H}} + \vec{\mathcal{P}}_m \tag{20}$$

($\vec{\mathcal{P}}_m$ je magnetická polarizace).

Potom můžeme Ampèrův zákon v látkovém prostředí napsat pomocí volných proudů

$$\oint_l \vec{\mathcal{H}} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = I, \qquad \text{resp.} \quad \nabla \times \vec{\mathcal{H}} = \vec{j} \tag{21}$$

a nespojitost tečných složek při průchodu plochou nespojitosti je dána pouze hustotou volných plošných proudů

$$H_{1t} - H_{2t} = j_S. \tag{22}$$

7.5 Materiálové vztahy

Vztahy mezi elektrickou indukcí a intenzitou jsou obecně dány pomocí **tenzoru elektrické susceptibility**. Rozvedeme-li vztah mezi elektrickou indukcí a intenzitou do řady do prvního řádu, dostaneme

$$\vec{\mathcal{D}} = \varepsilon_0\vec{\mathcal{E}} + \vec{\mathcal{P}}(\vec{\mathcal{E}}) \sim \varepsilon_0\vec{\mathcal{E}} + \vec{\mathcal{P}}(0) + \vec{\mathcal{E}} \cdot \nabla\vec{\mathcal{P}}(0) + \vec{o}(\mathcal{E}^2) \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathcal{P}}(\vec{\mathcal{E}}) = \vec{\mathcal{P}}_0 + \varepsilon_0\vec{\mathcal{E}} \cdot \chi(0) \tag{23}$$

(toto přiblížení nelze udělat u feroelektrik). Látky pak rozdělujeme podle těchto kritérií:

- jestli je susceptlibita tenzor; látka je
  - *anizotropní* – $\chi \neq \mathbf{I}\chi$, vektory $\vec{\mathcal{P}}$ a $\vec{\mathcal{E}}$ mají různý směr
  - *izotropní* – $\chi = \mathbf{I}\chi$
- jestli je $\vec{o}(\mathcal{E}^2)$ roven nule; látka je
  - *nelineární* – $\vec{o}(\mathcal{E}^2) \neq 0$
  - *lineární* – $\vec{o}(\mathcal{E}^2) = 0$
- jestli je vtištěná polarizace nulová; látka je
  - *elektricky tvrdá* – $\vec{\mathcal{P}}_0 \neq 0$
  - *elektricky měkká* – $\vec{\mathcal{P}}_0 = 0$
- jestli susceptibilita závisí na poloze; látka je
  - *nehomogenní* – susceptibilita je funkcí polohy
  - *homogenní* – susceptibilita není funkcí polohy
- jestli susceptibilita závisí na čase; látka je
  - *s disperzí* – susceptibilita závisí na čase (tedy frekvenci)
  - *bez disperze* – susceptibilita nezávisí na čase (tedy frekvenci)

Podobně můžeme charakterizovat látky i co se týče jejich magnetických vlastností.

Pro elektricky měkké látky tedy můžeme položit $\vec{\mathcal{D}} = \varepsilon\vec{\mathcal{E}}$, jsou-li navíc lineární, platí $\varepsilon = \varepsilon_0(\mathbf{I} + \chi)$.

Látky izotropní, homogenní a bez disperze se nazývají **prosté**.

Existuje i dělení látek podle velikost permitivity (susceptibility).

7.6 Měrné metody elektrických veličin

K měření **stejnosměrného proudu a napětí** se používají **přístroje s otočnou cívkou** (na cívku působí při průchodu proudu moment sil). Napětí měříme **voltmetry**, které připojujeme do obvodu paralelně, **ampérmetr** na měření proudu sériově.

Při měření odporu můžeme použít několik metod:

- *metoda přímá* – z Ohmova zákona
- *metoda srovnávací* – z podílu napětí při zapojení neznámého a známého odporu
- *metoda můstková* – z podmínky rovnováhy v můstku

Při měření **střídavého proudu a napětí** zjišťujeme zpravidla **efektivní hodnoty** dané vztahy

$$U_{\mathrm{ef}}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T U^2(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \text{resp.} \quad I_{\mathrm{ef}}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T I^2(t)\,\mathrm{d}t. \tag{24}$$

Speciálně pro sinusový průběh okamžité hodnoty proudu a napětí dostaneme

$$U_{\mathrm{ef}} = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}} \doteq 0,707 U_{\max} \qquad \text{resp.} \quad I_{\mathrm{ef}} = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}} \doteq 0,707 I_{\max}. \tag{25}$$

K měření střídavých proudů a napětí se používají přístroje s otočnou cívkou a usměrňovačem.

7.7 Metody měření magnetických veličin

K měření magnetické indukce můžeme použít několika metod:

- *metoda indukční* – využívá jevu elektromagnetické indukce: změní-li závit polohu vůči vyšetřovanému magnetickému poli, indukuje se v něm elektromotorické napětí
- *metoda Hallovy sondy* – využívá Hallova jevu: v kovové desce protékané proudem a v magnetickém poli vznikne elektrické pole

  Pro měření hysterezních smyček feromagnetik lze použít tyto metody:

  - *metoda magnetometrická* – založená na silových účincích měřeného magnetického pole na permanentní otočný magnet (= magnetometr)
  - *metoda zobrazovací* – zobrazení měřené smyčky oscilografem

8 Maxwellovy rovnice a jejich základní důsledky

Elektromagnetické potenciály a jejich vlastnosti. Zákony zachování. Vlastnosti stacionárních, kvazistacionárních a nestacionárních polí.

8.1 Maxwellovy rovnice

Klasickou teorii elektrických, magnetických a optických jevů dovršuje Maxwellova teorie. Základem Maxwellovy teorie jsou **Maxwellovy rovnice**

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\vec{\mathcal{D}} &= \rho, & \nabla\cdot\vec{\mathcal{B}} &= 0 \\ \nabla\times\vec{\mathcal{E}} + \frac{\partial\vec{\mathcal{B}}}{\partial t} &= 0, & \nabla\times\vec{\mathcal{H}} - \frac{\partial\vec{\mathcal{D}}}{\partial t} &= \vec{j} \end{aligned} \tag{26}$$

nebo v integrálním tvaru

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{\mathcal{D}}\cdot\mathrm{d}\vec{S} &= q, & \oint_S \vec{\mathcal{B}}\cdot\mathrm{d}\vec{S} &= 0 \\ \oint_l \vec{\mathcal{E}}\cdot\mathrm{d}\vec{l} + \int_S \frac{\partial\vec{\mathcal{B}}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\vec{S} &= 0, & \oint_l \vec{\mathcal{H}}\cdot\mathrm{d}\vec{l} - \int_S \frac{\partial\vec{\mathcal{D}}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\vec{S} &= I. \end{aligned} \tag{27}$$

Slovně je lze formulovat takto:

- *zdrojem elektrické indukce jsou volné náboje*
- *neexistují volné magnetické náboje*
- *vírové elektrické pole je tam, kde se s časem mění vektor magnetické indukce*
- *vírové magnetické pole je tam, kde se s časem mění vektor elektrická indukce a pohybuje náboj*

Maxwellovy rovnice jsou soustavou parciálních diferenciálních rovnic prvního řádu, obsahují 12 neznámých (navíc máme ještě materiálové vztahy a hraniční podmínky).

8.2 Zákony zachování

Zákony zachování lze napsat ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + I = P, \qquad \text{resp.} \quad \frac{\partial x}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{i} = p. \tag{28}$$

První člen popisuje časovou změnu dané veličiny, druhý tok a třetí jiné vnější vlivy, ztráty, apod.

Z MR můžeme pro pole odvodit **zákon zachování energie** ve tvaru

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{\mathcal{S}} + \frac{\vec{j} \cdot \vec{j}}{\sigma} = \vec{j} \cdot \vec{\mathcal{E}_{vn}}, \qquad \text{kde} \quad u = \frac{1}{2}(\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{D}} + \vec{\mathcal{H}} \cdot \vec{\mathcal{B}}). \tag{29}$$

První člen popisuje časovou změnu hustoty energie, druhý energetický tok pomocí Poyntingova vektoru $\vec{\mathcal{S}} = \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}$ a třetí ztráty Jouleovým teplem. Levá strana obsahuje neelektrickou složku v elektrickém tvaru, resp. vtištěnou (elektromotorickou) sílu.

Dalším důležitým zákonem zachování je **zákon zachování náboje**, který vyjadřuje **rovnice kontinuity**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0. \tag{30}$$

Zákon zachování hybnosti napíšeme ve tvaru

$$\frac{\partial \vec{g}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{T} = -\vec{f}. \tag{31}$$

První člen je **hustota hybnosti elektromagnetického pole**

$$\vec{g} = \vec{\mathcal{D}} \times \vec{\mathcal{B}}, \tag{32}$$

druhý člen symetrický **tenzor toku hybnosti elektromagnetického pole**

$$\mathbf{T} = -\vec{\mathcal{D}}\vec{\mathcal{E}} - \vec{\mathcal{B}}\vec{\mathcal{H}} + \mathbf{I}u. \tag{33}$$

Na levé straně je hustota síly

$$\vec{f} = \rho\vec{\mathcal{E}} + \vec{j} \times \vec{\mathcal{B}}. \tag{34}$$

Podobným způsobem lze vyjádřit i **zákon zachování momentu hybnosti**

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{r} \times \vec{g}) + \nabla \cdot \mathbf{L} = -\vec{m}, \qquad \text{kde} \quad \mathbf{L} = -\mathbf{T} \times \vec{r} \quad \text{a} \quad \vec{m} = \vec{r} \times \vec{f} \tag{35}$$

8.3 Elektromagnetické potenciály

Z MR vyplývá, že vektorové pole $\vec{\mathcal{B}}$ je solenoidální, proto můžeme zavést vektorový potenciál

$$\vec{\mathcal{B}} = \nabla \times \vec{\mathcal{A}}. \tag{36}$$

Když dosadíme do MR, zjistíme, že je vhodné zavést navíc skalární potenciál

$$\vec{\mathcal{E}} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{\mathcal{A}}}{\partial t}. \tag{37}$$

Potom jsou dvě (ze čtyř) rovnic splněny identicky.

Chceme-li řešit MR pro speciální případ, kdy ε a μ jsou konstanty, je vhodné požadovat, aby potenciály splňovaly **Lorentzovu podmínku**

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{A}} + \varepsilon\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \tag{38}$$

Potom musí oba potenciály splňovat **nehomogenní vlnovou rovnici**

$$\begin{array}{rcl} \triangle\varphi - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} & = & -\frac{\rho}{\varepsilon} \\ \triangle\vec{\mathcal{A}} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{A}}}{\partial t^2} & = & -\mu\vec{j}. \end{array} \tag{39}$$

Lorentzovu podmínku lze vždy splnit, protože potenciály nejsou dány jednoznačně. Při **kalibrační transformaci**

$$\varphi' = \varphi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}, \qquad \vec{\mathcal{A}}' = \vec{\mathcal{A}} + \nabla\Lambda \tag{40}$$

se nezmění měřitelné veličiny $\vec{\mathcal{E}}$ a $\vec{\mathcal{B}}$, a proto můžeme volit kalibrační funkci Λ tak, aby potenciály splňovaly Lorentzovu podmínku.

8.4 Elektrostatika

Nejjednodušší pole je **pole statické**, kde jsou všechny úplné časové derivace nulové (náboj nekoná pohyb). MR mají tvar

$$\begin{array}{rclcrcl} \nabla \cdot \vec{\mathcal{D}}(\vec{r}) & = & \rho(\vec{r}), & \qquad & \nabla \cdot \vec{\mathcal{B}}(\vec{r}) & = & 0 \\ \nabla \times \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) & = & 0, & & \nabla \times \vec{\mathcal{H}}(\vec{r}) & = & 0 \end{array} \tag{41}$$

Statické magnetické pole tedy neexistuje (vzniká pohybem náboje).

Základní úlohou elektrostatiky je spočítat elektrické pole těles, u kterých známe rozložení náboje. K tomu můžeme použít **Gaussův zákon** (jednu z MR) nebo vztah pro intenzitu elektrického pole. Při použití **elektrostatického potenciálu**

$$\vec{\mathcal{E}} = -\nabla\varphi \tag{42}$$

řeší MR **Poissonova rovnice**

$$\triangle\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \tag{43}$$

která se při nulové objemové hustotě náboje redukuje na **Laplaceovu rovnici**

$$\triangle\varphi = 0. \tag{44}$$

8.5 Stacionární pole

Ve stacionárním stavu nezávisí žádná makroskopická veličina explicitně na čase (parciální derivace jsou tedy nulové). MR mají tvar

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{\mathcal{D}}(\vec{r}) &= \rho(\vec{r}), & \nabla \cdot \vec{\mathcal{B}}(\vec{r}) &= 0 \\ \nabla \times \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) &= 0, & \nabla \times \vec{\mathcal{H}}(\vec{r}) &= \vec{j}(\vec{r}) \end{aligned} \tag{45}$$

Elektrické a magnetické pole se oddělí.

Ve **stacionárním elektrickém poli** zůstává v platnosti Gaussův zákon. Pro pohyb náboje je vhodné zavést veličinu **elektrický proud**

$$I(t) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \int \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S}. \tag{46}$$

Schopnost látky vést elektrický proud charakterizuje **vodivost**. Pokud je $\sigma > 10^6$, jedná se o vodič, je-li $\sigma < 10^{-8}$, jedná se o nevodič.

Kromě proudu se zavádí pojem **napětí** jako rozdíl potenciálu mezi dvěma body

$$U_{AB} = \varphi(A) - \varphi(B). \tag{47}$$

Ve vodiči vyjadřuje závislost proudu a napětí **Ohmův zákon**

$$I = \frac{U}{R}, \qquad \text{resp.} \quad \vec{j} = \sigma \vec{\mathcal{E}} \tag{48}$$

v diferenciálním tvaru. V tomto přiblížení se studují obvody ve stacionárním stavu.

V teorii **stacionárního magnetického pole** můžeme použít **Ampèrův zákon**, resp. **Biotův-Savartův zákon** pro výpočet magnetického pole.

8.6 Kvazistacionární pole

V **kvazistacionárním přiblížení** připouštíme závislost na čase a zároveň klademe podmínku

$$\vec{j} \gg \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t}. \tag{49}$$

MR můžeme napsat ve tvaru

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{\mathcal{D}}(\vec{r},t) &= \rho(\vec{r},t), & \nabla \cdot \vec{\mathcal{B}}(\vec{r},t) &= 0 \\ \nabla \times \vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t) + \tfrac{\partial \vec{\mathcal{B}}(\vec{r},t)}{\partial t} &= 0, & \nabla \times \vec{\mathcal{H}}(\vec{r},t) &= \vec{j}(\vec{r},t) \end{aligned} \tag{50}$$

Za kvazistacionární můžeme považovat pole s frekvencí $f = 50\ \mathrm{Hz} - 1\ \mathrm{kHz}$.

Elektrické a magnetické pole je svázáno a vzniká **elektromagnetické pole**. Každá časová změna magnetického pole vyvolá vznik pole elektrického.

Do teorie kvazistacionárního přiblížení patří **elektromagnetická indukce**. Bylo experimentálně zjištěno, že smyčkou umístěnou v magnetickém poli začne v určitých případech protékat proud. Tyto případy jsou

- smyčka se začne vhodným způsobem pohybovat
- vhodným způsobem se začnou pohybovat zdroje magnetického pole
- smyčka i zdroje jsou v klidu, ale mění se magnetické pole uvnitř smyčky

Vznik **indukovaného elektromotorického napětí** tedy určuje změna celkového magnetického toku procházejícího plochou smyčky

$$U_F(t) = -\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t} \tag{51}$$

(tzv. **Faradayův zákon elektromagnetické indukce**). Směr indukovaného proudu určuje **Lenzovo pravidlo**: *Směr indukovaného proudu ve smyčce je takový, že vzniklé magnetické pole se působí proti změně toku odpovědné za vznik indukovaného proudu*(tj. znaménko minus v rovnici).

Zavedeme-li veličinu **vlastní indukčnost**, která charakterizuje schopnost vodiče vytvářet magnetické pole, vztahem

$$\Psi = LI, \tag{52}$$

dostaneme podle zákon elektromagnetické indukce

$$U_F = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}. \tag{53}$$

V kvazistacionárním přiblížení se vyšetřují střídavé obvody s cívkou, kondenzátorem a odporem.

8.7 Nestacionární pole

Nejobecnější případ elektromagnetického pole je **pole nestacionární**. MR platí v nejobecnějším tvaru

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\vec{\mathcal{D}}(\vec{r},t) &= \rho(\vec{r},t), & \nabla\cdot\vec{\mathcal{B}}(\vec{r},t) &= 0 \\ \nabla\times\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t)+\tfrac{\partial\vec{\mathcal{B}}(\vec{r},t)}{\partial t} &= 0, & \nabla\times\vec{\mathcal{H}}(\vec{r},t)-\tfrac{\partial\vec{\mathcal{D}}(\vec{r},t)}{\partial t} &= \vec{j}(\vec{r},t). \end{aligned} \tag{54}$$

V nestacionárních polích musíme používat **zobecněný Ampèrův zákon** s celkovou nestacionární hustotou proudu

$$\nabla\times\vec{\mathcal{H}} = \vec{j}_c = \vec{j} + \frac{\partial\vec{\mathcal{D}}}{\partial t} = \vec{j} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{\mathcal{E}}}{\partial t} + \frac{\partial\vec{\mathcal{P}}}{\partial t}. \tag{55}$$

Kromě volného a polarizačního proudu musíme tedy zavést **Maxwellův proud**, který není spojen s pohybem nábojů, ale s časovou změnou elektrického pole. Maxwellův proud umožňuje např. uzavření obvodu střídavého proudu s kondenzátorem.

9 Elektrické obvody stacionární, kvazistacionární a střídavé

Ustálený a neustálený stav, metody řešení. Kirchhoffova pravidla. Jouleův zákon.

9.1 Obvody

Důležitým kritériem pro klasifikaci obvodů jsou **obvody stejnosměrné**, kde působí pouze zdroje s časově neproměnným elektromotorickým napětím, a **obvody střídavé** se zdrojem, který má střídavé elektromotorické napětí o kruhové frekvenci ω. Vyskytují se i obvody se složitějším průběhem napětí; důležitou skupinou jsou obvody s obecně periodickým průběhem napětí.

Bezprostředně po zapnutí mohou být proudy v jednotlivých prvcích stejnosměrného obvodu časově proměnné (popř. neharmonické u střídavých obvodů); obvod je v tzv. **neustáleném stavu**. Po uplynutí dostatečné doby časově proměnné resp. neharmonické vlivy vymizí a obvod je ve **stavu ustáleném**.

9.2 Kirchhoffova pravidla a komplexní symbolika

Okamžité hodnoty napětí a proudu je vhodné popisovat pomocí komplexních veličin

$$\begin{array}{rclcl} U(t) & = & \Re\{\tilde{U}(t)\} & = & \Re\{\bar{U}\,\mathrm{e}^{\imath\omega t}\} \\ I(t) & = & \Re\{\tilde{I}(t)\} & = & \Re\{\bar{I}\,\mathrm{e}^{\imath\omega t}\} \end{array} \tag{56}$$

Abychom mezi těmito veličinami mohli psát vztah analogický Ohmově zákonu, musíme zavést **komplexní impedanci** pro odpor, indukčnost a kapacitu

$$\begin{array}{rcl} \tilde{Z}_R & = & R \\ \tilde{Z}_L & = & \imath\omega L \\ \tilde{Z}_C & = & \frac{1}{\imath\omega C}. \end{array} \tag{57}$$

Potom platí

$$\tilde{U} = \tilde{Z}\tilde{I}. \tag{58}$$

Pro obvod v kvazistacionárním stavu lze formulovat **Kirchhoffova pravidla**. **I. Kirchhoffův zákon** nám říká, že *algebraický součet proudů v uzlu je nulový*, matematicky zapsáno

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{I}_j(t) = \sum_{j=1}^{n} \bar{I}_j(t) = 0. \tag{59}$$

Podle **II. Kirchhoffova zákona** je *součet napětí v uzavřené smyčce roven součtu elektromotorických napětí ve smyčce působících*

$$\sum_{j=1}^{m} \bar{U}_{Fj} = \sum_{l=1}^{n} \bar{Z}_l \bar{I}_l. \tag{60}$$

9.3 Metody řešení obvodů

Pro jednoduché obvody s jedním zdrojem můžeme použít **Ohmův zákon** (pro stejnosměrné v obyčejném, pro střídavé v komplexním tvaru), kdy *sériově řazené odpory (impedance) sčítáme* a *u paralelně řazených odporů (impedancí) sčítáme převrácené hodnoty.*

Složitější (tj. s více zdroji) obvody **v ustáleném stavu** můžeme řešit

- *přímou aplikací Kirchhoffových pravidel* – použijeme I. Kirchhoffovo pravidlo a vzniklé rovnice doplníme II. Kirchhoffovým pravidlem tak, aby rovnice ve vzniklé soustavě byly lineárně nezávislé
- *metodou smyčkových proudů* – každé smyčce přiřadíme proud a skutečné proudy v jednotlivých větvích jsou superpozicí smyčkových proudů (v podstatě I. Kirchhoffův zákon), pak pro vybrané nezávislé smyčky sestavíme rovnice využitím II. Kirchhoffova pravidla
- *metodou uzlových napětí* – sestavujeme rovnice pro jednotlivé uzly pomocí I. Kirchhoffova pravidla
- *Thévéniova věta – proud libovolnou větví se nezmění, jestliže tuto větev vyjmeme z obvodu a připojíme ji ke zdroji, jehož elektromotorické napětí je rovno napětí, které zbude na uzlech po vyjmutí větve, a jehož vnitřní impedance je rovna impedanci daného obvodu mezi těmito uzly po nahrazení všech zdrojů jejich vnitřními impedancemi*

Při řešení obvodů v **neustáleném stavu** je nutno do Kirchhoffových pravidel dosazovat časově proměnná napětí a proudy daná vztahy

$$\begin{aligned} U_R(t) &= RI(t) \\ U_L(t) &= L\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} \\ U_C(t) &= \frac{q(t)}{C} \end{aligned} \tag{61}$$

a řešit lineární diferenciální rovnice typu

$$L\frac{\mathrm{d}^2 I(t)}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}I(t) = \frac{\mathrm{d}U_F(t)}{\mathrm{d}t}. \tag{62}$$

Pro takovéto diferenciální rovnice je často vhodnou metodou řešení **Laplaceova transformace**.

9.4 Jouleův zákon

Při vedení proudu vodičem dochází ke ztrátám. Kvantitativně jsou popsány **Jouleovým zákonem**

$$P_J = UI, \qquad \text{resp.} \quad p_j = \vec{j} \cdot \vec{\mathcal{E}}: \tag{63}$$

ve vodiči protékaném proudem vzniká Jouleovo teplo; tepelný výkon ve vodiči je dán součinem protékajícího proudu a napětí.

Tento člen se objevuje i v rovnici kontinuity.